

Implementación de un algoritmo de control discreto en espacio de estado utilizando un Filtro de Kalman

CARLOS ANDRÉS ÁLVAREZ PELÁEZ ⁽¹⁾, LAURA CAMILA RODRÍGUEZ PEÑA ⁽²⁾,
MARIANA RAMÍREZ ATEHORTÚA ⁽³⁾, RIGOBERTO MALDONADO TORRES ⁽⁴⁾

(1) carlospelaez@outlook.com

(2) lauris_rp@hotmail.com

(3) ramirez.mariana@hotmail.com

(4) ribemat@gmail.com

Escuela de Ingeniería de Antioquia
Ingeniería Mecatrónica
Envigado, Colombia

Implementación de un algoritmo de control discreto en espacio de estado utilizando un Filtro de Kalman

RESUMEN

Palabras clave:

Filtro de Kalman; Ley de control; espacio de estado; señal de control; ruido blanco; observador de estado; estimador de estado; error observado; vector de estado observado

Este artículo es el producto de un informe de laboratorio del curso Control Digital en el octavo semestre de la carrera de Ingeniería Mecatrónica, en él se muestra el procedimiento para: el análisis, el diseño, la validación e implementación de un controlador discreto en espacio de estado, aplicado a una planta la cual es un sistema neumático donde la variable a controlar es la presión en el interior de un tanque cerrado. Para configurar la ley de control, la matriz de realimentación del estado K se obtiene por asignación de polos, mediante especificaciones de respuesta temporal del sistema neumático, la estimación del vector de estado se realiza mediante la aplicación de un filtro de Kalman y para parametrizar las matrices Q y R del filtro se utiliza la varianza del ruido presente en el sensor, un transmisor de presión de 4 – 20 ma. Se establece solo en simulación una comparación entre el desempeño de un observador de Luenberger de orden completo tipo predictor utilizado para observar el estado del sistema y el filtro de Kalman utilizado como estimador de estado del sistema, el algoritmo de control se implementa en un kit arduino due y para la interfaz hombre-máquina (HMI) se usó el programa MATLAB, en donde se muestran la respuesta y el desempeño del sistema de control en lazo cerrado cuando este es sometido a diferentes cambios del valor de consigna, diferentes perturbaciones y de carga.

I. INTRODUCCIÓN

En ocasiones, las perturbaciones tanto externas como internas presentes en los procesos pueden lograr desestabilizar un sistema de control en lazo cerrado, los cuales requieren mantener ciertas condiciones de estabilidad para garantizar la calidad del producto.

Gracias a los continuos avances tecnológicos en la era de la computación y la informática, se ha desarrollado el Filtro de Kalman, considerado como uno de los mayores logros del siglo XXI, el cual permite eliminar las perturbaciones generadas por ruidos en el sensor y/o dinámicas no modeladas en el proceso que afectan adversamente a los sistemas. Mediante la estimación de estados se permite realizar las acciones de control necesarias hasta lograr la calidad del producto requerida [1].

El filtro de Kalman elimina los efectos negativos que produce el ruido sobre un sistema de control, basándose en datos como la varianza de la medición y de los parámetros del sistema, de forma tal que mediante el conocimiento del comportamiento actual del sistema es posible estimar un estado futuro aplicando cierta corrección, es así como surgen: las ecuaciones para el proceso, la predicción, la actualización del estado y el error (a priori y a posteriori) [1].

En este informe se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo e implementación de una ley de control que utiliza un filtro de Kalman para la estimación del vector de estado de un sistema continuo y mediante simulación se compara su desempeño con el de un observador de Luenberger de orden completo tipo predictor, se valida el sistema de control en lazo cerrado al implementarlo en un sistema neumático, en el cual la variable controlada es la presión $p(t)$ y al someter el sistema de control en lazo cerrado a cambios en la referencia, perturbaciones externas y cambios en la carga.

II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA CONTINUO

El modelo utilizado es el sistema neumático mostrado en la figura 1, en el cual la variable con-

trolada es la presión en un tanque cerrado y dentro de un rango de 0-23 (Libras por pulgada cuadrada manométricas) psig $p(t)$, como elemento final de control (Efc) se usa una válvula neumática con un posicionador de 4-20 (miliamperios) ma como señal de entrada.

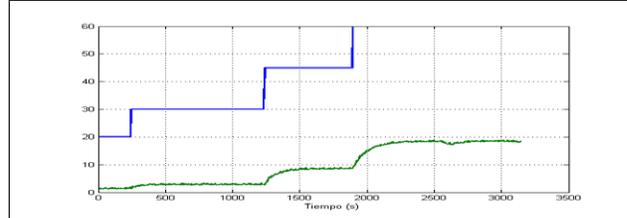
Fig. 1. Sistema neumático utilizado como modelo



El comportamiento dinámico del sistema es mostrado en la figura 2. Con el eje y en % y el eje x en segundos, se obtiene por el método de curva de reacción (Ziegler- Nichols) [2,4], al aplicarle a la válvula excitaciones tipo escalón de diferente magnitud, El modelo empírico del sistema continuo es obtenido con la herramienta Iden del Matlab esta expresado en la ecuación (1).

$$Gp(s) = \frac{0.1444}{s^3 + 2.4671s^2 + 2.2187s + 0.7298} e^{-1.6647s} \quad (1)$$

Fig. 2. Comportamiento dinámico del sistema neumático en lazo abierto (Método de curva de reacción por Ziegler-Nichols).



El periodo de muestreo se obtiene por el método del τ_{ao} equivalente en lazo cerrado [2,4] utilizado para discretizar el modelo (1) es $T=1.675$ minutos, la función de transferencia de pulso resultante es: (2).

$$HGp(z) = \frac{P(z)}{M(z)} = \frac{0.04134z^2 + 0.05787z + 0.004994}{z^4 - 0.6182z^3 + 0.1609z^2 - 0.01604z} \quad (2)$$

A partir de (2) se expresa el sistema en un espacio de estado discreto (3) [2,4].

$$x(K+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.01604 & -0.1609 & 0.6182 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} m(k)$$

$$p(k) = [0.004994 \quad 0.05787 \quad 0.04134 \quad 0]x(k) \quad (3)$$

Dónde: p(k) es la presión en el interior del tanque cerrado, x(k) es el vector de estado, m(k) es la señal de excitación aplicada al Efc que en lazo cerrado con el controlador es la señal de control.

En la figura 3, se muestra la validación de los modelos: continuo (1) y discreto (2), y en la figura 4, se muestra la validación de modelo expresado en un espacio de estado discreto (3).

Fig. 3. Validación del modelo continuo (1) y del Modelo discreto (2).

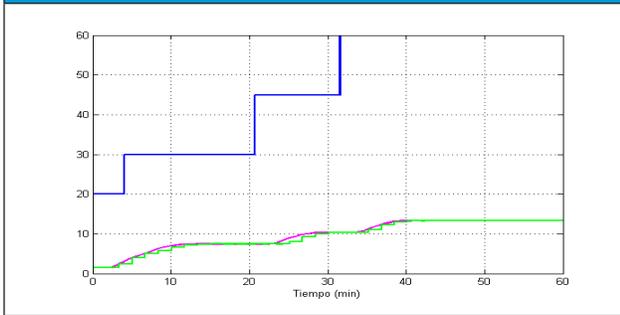
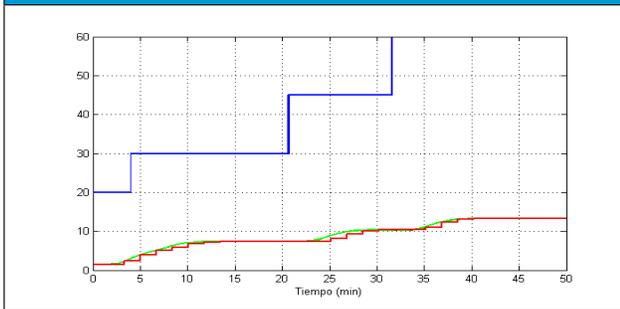


Fig. 4. Validación del modelo continuo (2) expresado en un espacio de estado en tiempo discreto (3).



III. DISEÑO DEL CONTROLADOR EN ESPACIO DE ESTADO DISCRETO

A. Diseño de la Ley de Control

Para diseñar la ley de control, se asume, para la respuesta del sistema de control en lazo cerrado: un

factor de amortiguamiento relativo ϵ de 0.73 y un tiempo de establecimiento de lazo cerrado $t_{s_{LC}}$ de 8.5 minutos.

Los polos dominantes para el cálculo de la matriz de realimentación del estado K (Matriz K) y su ecuación característica deseada son: (4, 5) [4,5.]

$$z = 0.3363 \pm 0.3059j \quad (4)$$

$$z^2 - 0.6726z + 0.2067 = 0 \quad (5)$$

El sistema discreto (3) es de orden $n=4$ y para completar la ecuación característica para el cálculo de la matriz K se debe añadir dos polos no dominantes. A partir de la función de transferencia de tercer orden continua dada por la ecuación (1) se establece que el polo más alejado del eje imaginario se encuentra en $s=-0.9110$ [3].

Estos polos no dominantes se asignan como se muestra en (6, 7) y sus equivalentes discretos (8, 9), la ecuación característica completa para el cálculo de la matriz K está dada en la ecuación (10) [2,4].

$$s_1 = -10 * 0.9110 = -9.11 \quad (6)$$

$$s_2 = -12 * 0.9110 = -10.932 \quad (7)$$

$$z_1 = 2.3604 * 10^{-7} \quad (8)$$

$$z_2 = 1.1158 * 10^{-8} \quad (9)$$

$$\alpha_K(z) = z^4 - 0.6726z^3 + 0.2067z^2 - 5.10958 \times 10^{-8}z + 5.44393 \times 10^{-16} = 0 \quad (10)$$

Para el cálculo de la matriz K se aplica el método de la fórmula de Ackerman y como el sistema discreto es completamente controlable, la matriz K calculada es mostrada en (11) [2,4].

$$K = [0 \quad 0.0160 \quad 0.0458 \quad -0.0545] \quad (11)$$

La ley de control, donde se realimenta el vector de estado x(k), queda determinada por la ecuación (12).

$$u(k) = -[0.0160X_2(k) + 0.0458X_3(k) - 0.0545X_4(k)] \quad (12)$$

B. Cálculo del observador de estado de orden completo tipo predictor.

Para calcular la matriz de ganancias del observador de estado de orden completo tipo predictor (Matriz L), por el método de asignación de polos,

se parte de la frecuencia a la cual se calculó la matriz K y debe estar dentro del intervalo definido por la ecuación (12). Esto para incrementar la velocidad de corrección del error dinámico y por tanto para que el sistema de control en lazo cerrado llegue a un punto de convergencia más rápidamente, En esta expresión w_L es la frecuencia para el cálculo de la matriz L y w_K es la frecuencia a la cual se calcula la matriz K, el intervalo de frecuencias esta dado en la expresión (13) [2,4].

$$(2 \leq w_L \leq 6)w_K \quad (12)$$

$$(1.6667 \leq w_L \leq 4.9998) \text{ rad/min} \quad (13)$$

Se elige $w_L = 1.6667 \text{ rad/min}$, los polos dominantes para calcular la matriz L, con un $T=1.675$ minutos son mostrados en la expresión (14) y la ecuación característica deseada para el cálculo de la matriz L está dada por (15) [2,4].

$$z = -0.1152 \pm 0.1477j \quad (14)$$

$$\alpha_{dl}(z) = z^2 + 0.2304z + 0.0351 = 0 \quad (15)$$

Como el sistema expresado en un espacio de estado discreto (3) es de orden $n=4$, se agregan dos polos en tiempo discreto no dominantes para completar el orden de la ecuación (15), como se expresa en la ecuación (16).

$$\alpha_{dl}(z) = (z^2 + 0.2304z + 0.0351) \cdot (z - 2.3604 \cdot 10^{-7}) \cdot (z - 1.1158 \cdot 10^{-8}) = 0 \quad (16)$$

Para el cálculo de la matriz L se aplica la fórmula de Ackerman y como el sistema es completamente observable, la matriz L es (17) [2,4].

$$L = \begin{bmatrix} 12.3237 \\ 8.8745 \\ 3.2462 \\ 0.7766 \end{bmatrix} \quad (17)$$

La ecuación del observador de estado de orden completo Tipo predictor es dado en la ecuación (18) [2,4]. La nueva ley de control donde se realimenta el vector del estado observado [2,4] y si se cumple que $x(k) \cong q(k)$ entonces el error observado $\tilde{e}(k) = 0$. Luego, la ley de control

$$q(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.01604 & -0.1609 & 0.6182 \end{bmatrix} q(k) + \begin{bmatrix} 12.3237 \\ 8.8745 \\ 3.2462 \\ 0.7766 \end{bmatrix} [y(k) - [0.004994 \quad 0.05787 \quad 0.04134 \quad 0]] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} m(k) \quad (18)$$

se puede reescribir de la forma mostrada en la ecuación (19).

$$u(k) = -[0.0160q_2(k) + 0.0458q_3(k) - 0.0545q_4(k)] \quad (19)$$

IV. VALIDACIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR DE ESTADO DISCRETO

Como en esta estrategia de control no se garantiza error de estado estable igual a cero, esto se debe a que tanto el observador de estado de orden completo tipo predictor como la ley de control se ubican en el lazo de realimentación, condición suficiente para que la realimentación no sea unitaria se procede a calcular un factor de corrección de error K_0 para prefiltrar la referencia e ingresarla al comparador del controlador, su valor es dado por la ecuación (20) [2,4].

$$K_0 = 5.1276 \quad (20)$$

Para validar el sistema de control en lazo cerrado incluyendo: la ley de control, el observador de orden completo tipo predictor y el factor de corrección de error se utiliza el diagrama de bloques desarrollado en Simulink, el cual se expone en la figura 5.

A partir del algoritmo expuesto en la figura 5 se obtienen las figuras 6 a 9, las cuales fueron divididas para lograr una mejor visualización de las respuestas del comportamiento dinámico del sistema de control en lazo cerrado solo en simulación.

Fig. 5. Diagrama de bloques para validar el sistema de control en lazo cerrado dado en espacio de estado discreto, incluyendo: el sistema discreto, el observador de estado de orden completo tipo predictor, la ley de control y el factor de corrección de error.

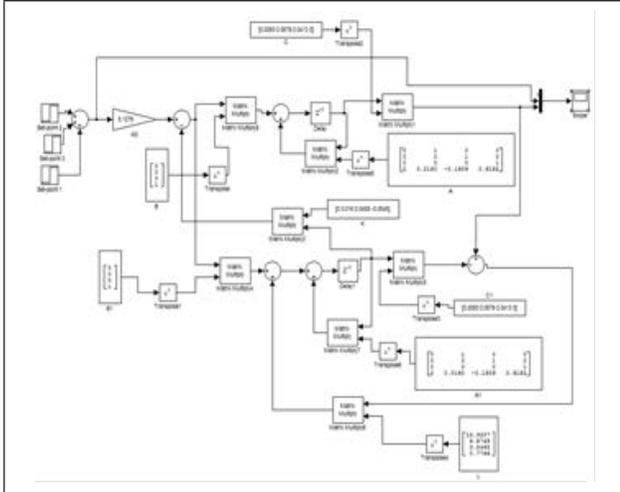


Fig. 6. Sistema de control en lazo cerrado: referencia (rojo), salida observada (azul) y ley de control u(k) (amarillo).

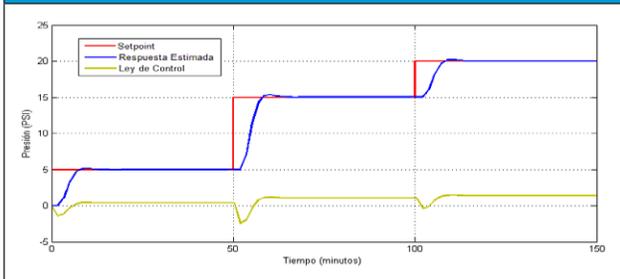
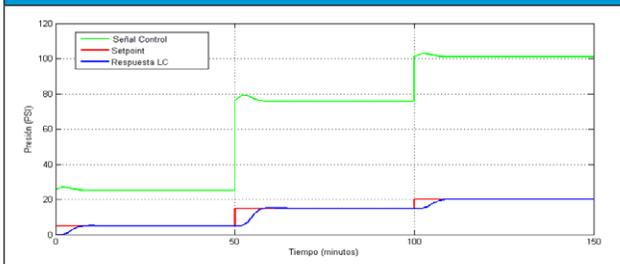


Fig. 7. Sistema de control en lazo cerrado: referencia (rojo), variable controlada 'presión' p(k) (azul) y la señal de control m(k) (verde).



Como se observa en la figura 7, el tiempo de establecimiento de lazo cerrado de la respuesta de la variable controlada presión p(k) se encuentra en el rango dado por $(0.4 \leq t_{SLC} \leq 0.8)t_{SLA}$, es decir, $4.4795 \leq t_{SLC} \leq 8.9587$, minutos, las oscilaciones en estado estable son pocas y el error en estado estable es muy cercano a cero. Es por esto que el algoritmo calculado funciona correctamente.

Fig. 8. Sistema de control en lazo cerrado: referencia (rojo), variable controlada 'presión' p(k) (azul).

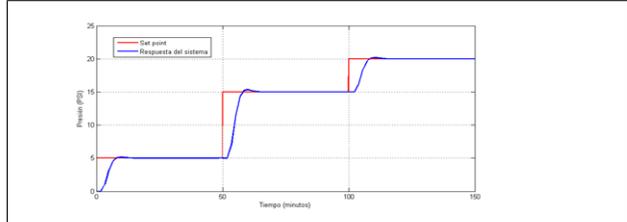
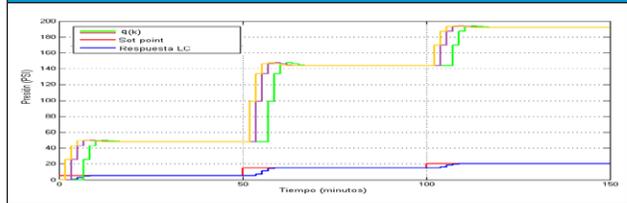


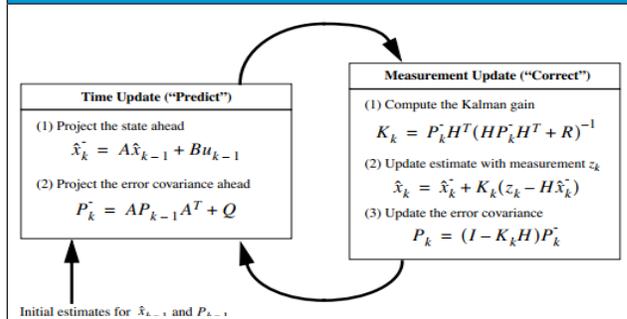
Fig. 9. Sistema de control en lazo cerrado: referencia (rojo), variable controlada 'presión' p(k) (azul) y el vector del estado observado (colores varios).



V. VALIDACIÓN MEDIANTE SIMULACIÓN DEL CONTROLADOR DE ESTADO DISCRETO CON EL FILTRO DE KALMAN INCLUIDO

El algoritmo de Kalman consta de dos pasos: el primer paso es el de predicción y segundo paso es el de corrección; para esto es necesario realizar una secuencia de operaciones y actualizaciones que permiten obtener un valor estimado de la medición o del estado obviando los efectos negativos del ruido en el sistema de control [1,4,5,6], los pasos necesarios para el desarrollo del filtro de kalman se muestran en la figura 10.

Fig. 10. Procedimiento para la implementación de las operaciones del Filtro de Kalman, con sus respectivas operaciones [1,6].



Para validar mediante una simulación el desempeño del filtro de kalman se implementa el siguiente código utilizando lenguaje C, y se muestra a continuación:

```

% Algoritmo en Matlab del Filtro de Kalman
% aplicado al espacio de estados de la función
% de tercer orden continuo del sistema de presión

num=[0.4422]; %numerador del sistema continuo
den=[1 2.947 2.1199]; %denominador del sistema
continuo.
[numR,denR]=pade(1.75,1);%Expansión por aproximación
de padé del retardo del sistema continuo de tercer orden.
[numTfs,denTfs]=series(num,den,numR,denR);%Multiplic
ación del sistema sin retardo por el retardo expandido por
Padé.
Hs=tf(numTfs,denTfs);%Funcion de transferencia continua.
h=1.35; %periodo de muestreo
Hz=c2d(Hs,h); %Funcion de transferencia discreta
[n,d]=tfdata(Hz,'v'); %Numerador y denominador de la
función de transferencia discreta
[nAd,nBd,nCd,nDd]=tf2ss(n,d);%Función de transferencia a
espacio de estado

%ECUACIONES DEL FILTRO DE KALMAN

uk=1; %Funcion escalón
Xem1=[0;0;0]; %Vector de estados estimado
Pkm1=1e6;%Covarianza del error
Q=47; %Varianza del ruido del proceso
R=47; %Covarianza del ruido de la medicion
Y=step(Hs);
Yest=zeros(1,180); %Salida estimada

for k=1:180
    Ys(k)=Y(k)+0.1*(0.4-rand); %Señal con ruido
    %Actualizacion de tiempo
    Xem=nAd*Xem1+nBd*uk; %Estado estimado a priori
    Pkm=nAd*Pkm1*nAd'+Q; %Covarianza del error a
    priori

    %Actualizacion de mediciones
    Kk=(Pkm*nCd')/(nCd*Pkm*nCd'+R);
    Xe=Xem+Kk*(Ys(k)-nCd*Xem); %Estado estimado a
    posteriori
    Pk=(eye(3)-Kk*nCd)*Pkm; %Covarianza del error a
    posteriori

    %Actualizaciones para la siguiente iteración
    Xem1=Xe;
    Pkm1=Pk;
    Yest(k)=nCd*Xe;
end

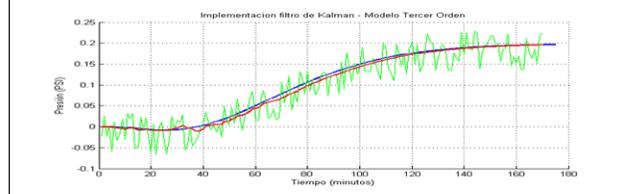
%Para graficar
figure(1)
hold on
grid
plot(Y)
plot(Ys,'g')
plot(Yest,'r')

```

Al ejecutar el algoritmo expuesto anteriormente, su respuesta, se muestra en la figura 11. Donde la respuesta del sistema continuo simulada es la variable presión $p(k)$ (curva de color azul), la me-

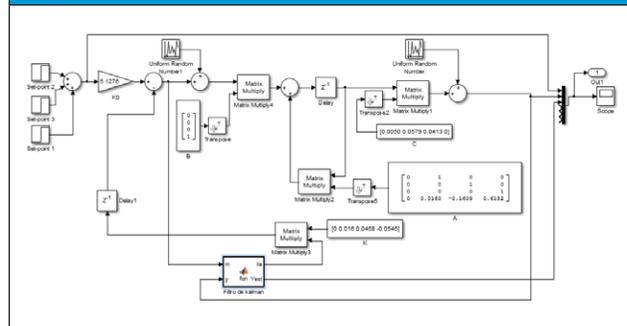
dición de la variable presión $p(k)$ medida por el sensor (base de datos) con ruido es la curva verde, y finalmente la curva roja es la salida estimada utilizando el filtro de kalman.

Fig. 11. Respuesta obtenida del algoritmo del Filtro de Kalman implementado a la función de transferencia de tercer orden en tiempo continuo (1).



Una vez validado el funcionamiento del algoritmo del filtro de Kalman en simulación, se realiza la implementación del nuevo sistema de control en lazo cerrado, se elimina del sistema de control la ecuación del observador de estado de orden completo tipo predictor y en lugar de observar el estado del sistema se reemplaza por el algoritmo del filtro de Kalman, y se pasa a estimar el vector de estado, para la implementación de la ley de control se utiliza la misma matriz K calculada en el ítem anterior, el algoritmo desarrollado para este nuevo sistema de control en lazo cerrado, se muestra en la figura 12.

Fig. 12. Programa para validar mediante simulación el sistema de control en lazo cerrado con el filtro de kalman y la ley de control.



Tras la simulación de este algoritmo se obtiene una respuesta en estado estable controlado, la cual cumple con los parámetros de diseño previamente establecidos, además de presentar alta inmunidad al ruido presentado por la medición y el proceso. Los resultados de esta simulación se muestran en las figuras 13 a 17.

Fig. 13. Respuesta del sistema de control en lazo cerrado: referencia $r(k)$ (rojo), respuesta del sistema presión $p(k)$ (verde), respuesta estimada presión $p(k)$ amarillo, señal de control $m(k)$ (azul) y el vector de estado estimado $x(k)$ (púrpura).

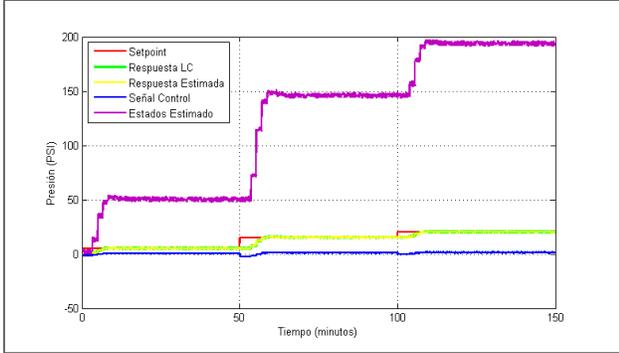


Fig. 14. Respuesta del sistema de control en lazo cerrado: referencia $r(k)$ (rojo), respuesta del sistema: variable presión $p(k)$ (azul).

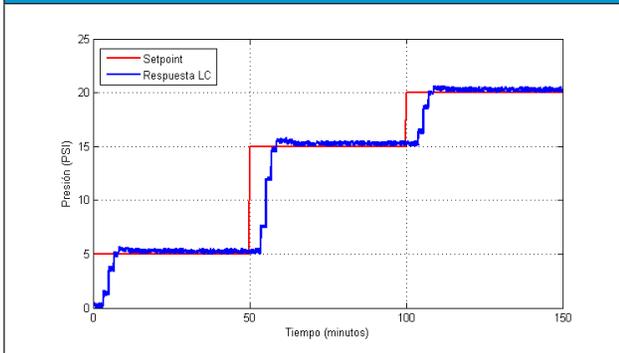
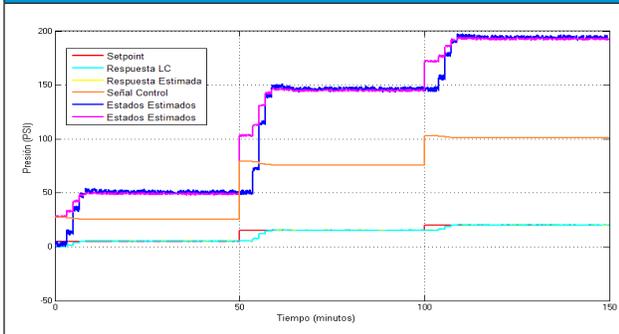


Fig. 15. Respuesta del sistema de control en lazo cerrado: referencia $r(k)$ (rojo), respuesta del sistema: variable presión $p(k)$ (azul), respuesta estimada: variable presión $p(k)$ (amarillo), señal de control $m(k)$ (naranja) y el vector de estado estimado $x(k)$ (azul rey y púrpura).



En base a estos resultados se determina que el funcionamiento del filtro de kalman junto con la ley de control es correcto ya que se cumplen los requerimientos de diseño previamente establecidos,

como son: el rango del tiempo de establecimiento en lazo cerrado, las oscilaciones en estado estable de la medición y el error de estado estable dentro del 2% de la magnitud de la excitación.

Fig. 16. Respuesta del sistema de control en lazo cerrado: referencia $r(k)$ (rojo), respuesta del sistema: variable presión $p(k)$ (azul), respuesta estimada: variable presión $p(k)$ (amarillo), señal de control $m(k)$ (naranja) y el vector de estado estimado $x(k)$ (azul rey y púrpura).

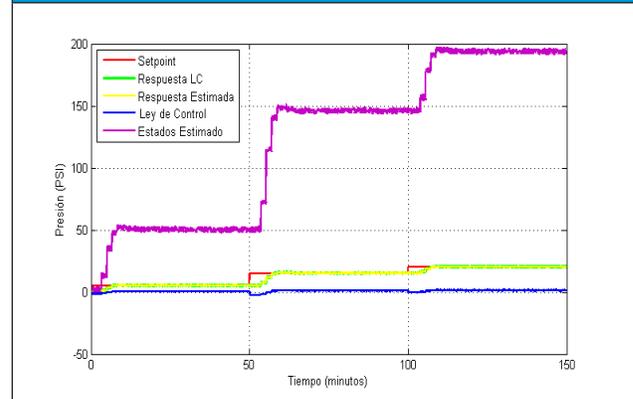
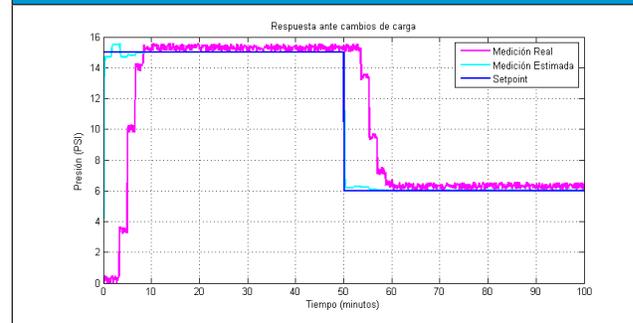


Fig. 17. Respuesta del sistema de control en lazo cerrado: variable controlada: variable presión $p(k)$ (rojo), respuesta estimada: variable presión $p(k)$ (azul), referencia $r(k)$ (azul rey) y con cambios de carga.



VI. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO DE CONTROL INCLUYENDO EL FILTRO DE KALMAN

Para la implementación del filtro de Kalman se utilizó un microcontrolador Arduino DUE de 32 bits, para su programación y puesta en marcha se requieren realizar diversas operaciones matriciales, para esto, fue necesario el uso de una librería adicional que permite reducir la longitud del código a implementar; esta librería se denomina "Eigen", [7] la cual realiza internamente por medio de ciclos anidados las operaciones matriciales que se requieran en el código principal.

En primer lugar se observa la respuesta de la planta (sistema neumático) ante diferentes cambios de Setpoint, lo cual muestra que su comportamiento dinámico es sobre amortiguada, tal cual como se muestra en las figuras 18 y 19, donde $y(k)$ es la presión $p(k)$ o respuesta medida, $m(k)$ es la señal de control, $\hat{x}(k)$ es el vector de estado estimado, $\hat{y}(k)$ es la presión estimada, $u(k)$ es la ley de control y $\hat{e}(k)$ es el error estimado.

Fig. 18. Respuesta real de la planta con la implementación del Filtro de Kalman y la Ley de Control.

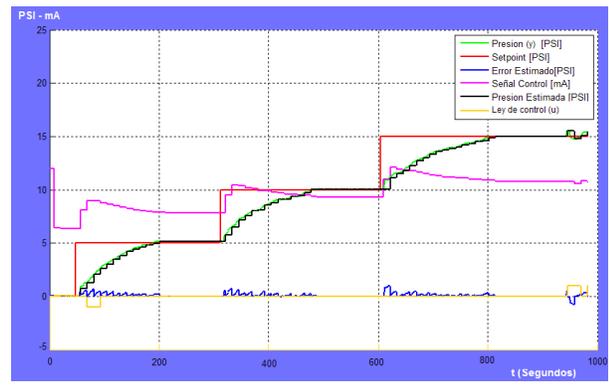
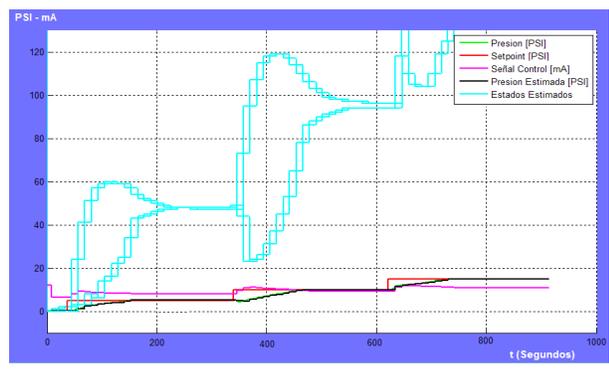


Fig. 19. Respuesta real de la planta con la implementación del Filtro de Kalman y la Ley de Control, con sus respectivos estados estimados.



Una vez verificada la funcionalidad del controlador ante diferentes cambios en el Setpoint, se procede a analizar su su respuesta ante la presencia de perturbaciones ingresadas al al sistema de forma manual y de diferentes magnitudes, el el controlador muestra un desempeño aceptable ante estas perturbaciones, logrando estabilizarse adecuadamente en la en referencia fijada. Estas respuestas se muestran en las figuras 20 y 21.

Fig. 20. Respuesta real de la planta con la implementación del Filtro de Kalman, ante las diferentes perturbaciones aplicadas en los setpoints de 5 y 15 psig.

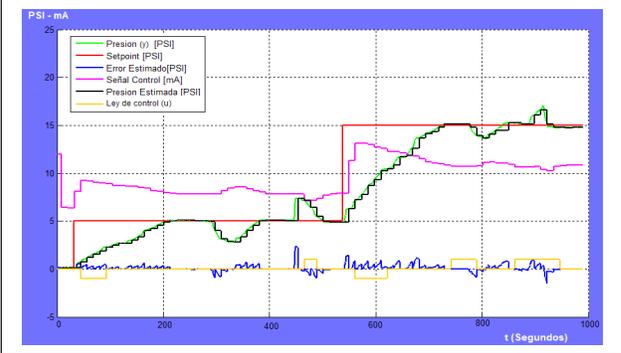
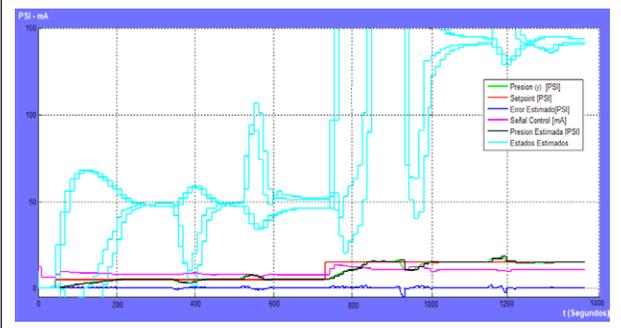
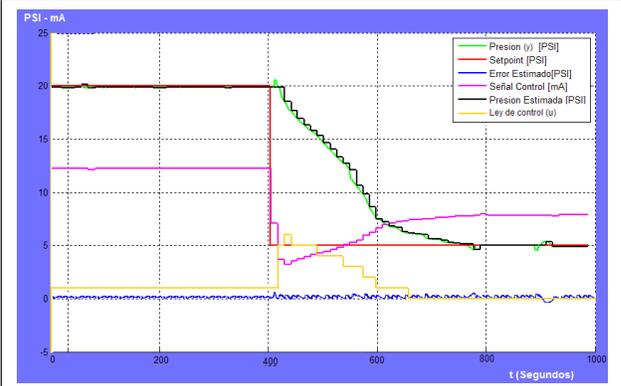


Fig. 21. Estados estimados por el filtro de kalman ante perturbaciones al sistema en los setpoints de 5 y 15 psig.



Por último se procedió a validar el funcionamiento del filtro de Kalman con la aplicación de un cambio de carga al sistema. Para lo cual fue necesario llevar la planta de un setpoint alto (20 psig) a un setpoint bajo (5 psig). De igual forma el resultado fue satisfactorio, mostrando una dinámica sobre amortiguada, tal como se observa en la figura 22.

Fig. 22. Respuesta de la planta real, ante cambios de carga.



VII. CONCLUSIONES Y CAUSAS DE ERROR.

Debido a que el filtro de Kalman se basa en la predicción del ruido para disminuir el error proveniente de este, se requiere disponer de una estimación precisa de la varianza que presenta el ruido en él, en las diferentes mediciones realizadas y que ésta sea diferente de cero.

La respuesta obtenida en la implementación del filtro, se ajusta adecuadamente a los parámetros de diseño previamente establecidos, esto se traduce en un buen desempeño del filtro y en una correcta elección de dichos parámetros.

Durante el proceso de implementación del algoritmo se requiere la realización de operaciones matriciales, para lograr esto se requiere la utilización de librerías externas que genera un consumo mayor de la memoria del Arduino y puede generar una reducción en su desempeño, además de un aumento considerable de la complejidad del programa.

En el proceso realizado para hallar el filtro es necesario hallar polos dominantes, cuyo ángulo óptimo es de 45° debido a que los polos calculados no cumplen con este valor es posible que existan alguna combinación de parámetros que generen una

mejor respuesta a lo obtenida, aunque los polos elegidos muestran un comportamiento adecuado.

REFERENCIAS

[1] <<Bishop, Gary. And Welch Grep. "An Introduction to the Filter Kalman", TR 95-04, 1 Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC 27599-3175 Updated: Monday, July 24, 2006.

[2] García. James Luis Eduardo, "Control Digital: Teoría y Práctica", Documento sin editar, 2009.

[3] Astrom J. Karl, and Hadgglund. Tora, "PID Controllers: Theory, Design And Tuning", Isa International, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, Ed 2, 1995.

[4] Phillips. Charles L, and Nagle. H Troy, "Digital Control Systems: Analysis and Design", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, Ed 3, 1995.

[5] Castañeda, Cárdenas José Ancizar, Nieto, Arias Manuel Antonio, and Ortiz. Bravo Víctor Alfonso, "Análisis y aplicación del filtro de Kalman a una señal con ruido aleatorio", Scientia et Technica Año XVIII, Vol. 18, No 1, Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701, Abril de 2013.

[6] Piarpuzan. Estupiñan Diego Fernando, "Aplicación de Perturbaciones Cubicas a Sistemas Lineales Controlados Por Realimentación de Estados". Manizales: Universidad Nacional de Colombia, 2006.

[7] Página principal eigen: http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main_Page