El análisis dimensional en economía

Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 12. p. 67-94. Envigado, enero-junio de 2014

Gabriel Poveda Ramos*

* Ingeniero químico, ingeniero electricista,matemático y PhD. en Ingeniería.
Correo electrónico: gapora@une.net.co

DOI: http:/dx.doi.org/10.14508/sdp.2014.6.12.67-94

EL ANÁLISIS DIMENSIONAL EN ECONOMÍA

Gabriel Poveda Ramos

Resumen

Se resume aquí brevemente qué es el Análisis Dimensional Clásico, nombre que se le da, por ejemplo, en la Física y en la Ingeniería. Se presenta el llamado Teorema *Pi* de Buckingham-Vaschy-Riabouchinski y se esboza una demostración sencilla. Se muestra cómo en Teoría Económica se trabaja con magnitudes fundamentales (como la moneda, la población humana, las cuantías físicas, etc.) y con magnitudes derivadas (como el ingreso per cápita, un cánon de arrendamiento, etc.) Se muestra cómo usar el Teorema *Pi* para deducir y para comprobar relaciones cuantitativas nuevas o ya conocidas. Se agregan algunos ejemplos resueltos.

Palabras claves: magnitudes físicas; magnitudes económicas; análisis dimensional; sistemas de unidades; Teorema *Pi*.

DIMENSIONAL ANALYSIS IN ECONOMICS

Abstract

Dimensional Analysis is briefly reminded here, as know in Physics and Engineering. The so-called *Pi* Theorem of Buckingham- Vaschy-Riabouchinski is introduced along with a simple demonstration. There is shown the way to introduce and handle fundamental dimensions in Economics (such as money, population, civil time, labor, etc.) and derived dimensions (such as per-capita income, daily wage, etc.). It is shown how to use *Pi* Theorem to deduce and check quantitative economic relations, both new or already known. Some worked examples are added.

Keywords: Physical magnitudes; Economic magnitudes; Dimensional analysis; Systems of units; *Pi* Theorem.

O ANÁLISE DIMENSIONAL EM ECONOMÍA

Resumo

Se resume brevemente o que é o Análise Dimensional clásico, nome que lhe dá, por exemplo, na Física e na Engenharia. Apresentamos o chamado Teorema *Pi* Buckingham - Vaschy-Riabouchinski e se esboça uma demonstração simples. Se mostra como em teoria econômica se trabalha com quantidades fundamentais (como a moeda, a população humana, os valores físicos, etc.) e com magnitudes derivadas (tais como renda per capita, um canon de locação, etc.) Se apresenta como usar o teorema de *Pi* para deduzir e para testar relações quantitativas novas ou já conhecidas. são adicionados Alguns exemplos trabalhados.

Palavras-chave: Quantidades físicas; Os indicadores econômicos; Análise dimensional; Sistemas de unidades; Teorema *Pi*.

El análisis dimensional en economía

Gabriel Poveda Ramos

Recibido: 30 de octubre de 2013. Aprobado: 22 de mayo de 2014
Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 12. pp. 65-92. Envigado, enero-junio de 2014

1. Introducción

Los conceptos de «cantidad» y de «dimensión» entraron a la ciencia Física desde años tempranos en el siglo XIX, y siguieron estudiándose como un aspecto básico de dicha ciencia durante el resto de la centuria, aunque no sin muchos debates, confusiones y contradicciones. Por fortuna en el siglo XX los aportes de algunos físicos o ingenieros lograron aclarar esos conceptos, darles una estructuración metodológica y convertirlos en elementos de un método heurístico y de un tipo de análisis muy poderoso y sorprendentemente sencillo de aplicar. A lo largo de los siglos XIX y XX varios Físicos de renombre usaron este análisis para encontrar leyes sobre el comportamiento de la materia y sobre fenómenos nuevos como los de la electricidad y los de las radiaciones. Gracias a estos trabajos este campo del conocimiento adquirió el nombre propio de Análisis Dimensional, y hacia mediados del siglo XX llegó a ser materia de numerosos tratados, artículos científicos y nuevas aplicaciones.

En Colombia, en algunas escuelas de algunas Ingenierías (como la Civil, la Química y la Mecánica), hacía mediados del siglo XX se llegó a impartir algunas clases de Análisis Dimensional, como auxiliar en el estudio de algunos capítulos especialmente complejos de la Hidrodinámica, de la Conducción del Calor, y de otros temas similares. Esta disciplina, sin embargo y desafortunadamente, ha ido cayendo en el olvido en nuestros medios académicos.

Pero en nuestro país (Colombia) nunca nadie ha mencionado la posibilidad de aplicar esta bella y sencilla disciplina al estudio y a la cuantificación de fenómenos y de teorías económicas, como se procederá a hacerlo aquí.

- ***Cantidades medibles, medidas y unidades de medida***

En el campo de la técnica, de la experimentación y en general del estudio del Mundo, es sumamente frecuente tratar con «características» o «particularidades» que están presentes en varios objetos, del tal manera que al comparar dos o más de esos objetos, sus respectivas «características» se puedan disponer en una sucesión de mayor a menor (o viceversa). Ejemplo: tratándose de un conjunto de 5 varillas de acero (unas rectangulares y otras redondas) rectilíneas, es evidente que todas tienen una misma «particularidad» o «característica» específica, que es en cada una, la distancia de un extremo al opuesto. Y es evidente que mediante un procedimiento empírico muy obvio, las varillas se pueden disponer en un orden (por ejemplo, en un mesa horizontal y rígida) de manera que a cada una le sobre un trazo, más o menos largo (o más o menos corto), respecto a la que tiene a su derecha. Se dirá así que la «particularidad» de que se trata (o sea la distancia en cada varilla de uno de sus extremos al otro) es una «cantidad medible», que llamamos «longitud».

Tratándose de las mismas varillas, el que trata con ellas puede decir que el peso de cada una es otra «cantidad medible». En cambio, el color de las varillas no es una cantidad medible, pues no hay métodos para establecer entre dos colores, cuál es «mayor» ni cuál es «menor».

Dada una «cantidad medible» (en el sentido indicado), se puede —y conviene— elegir a una de ellas, bien definida y universalmente aceptada y reproducible, que se adopta como <u>unidad de medida</u> de cantidades medibles que le sean comparables.

Hacer una «<u>medición»</u> es comparar una determinada <u>cantidad medible</u> con una unidad de medida previamente convenida. El resultado de una medición de cualquier cantidad se expresa como un producto de un número real «multiplicado» por la unidad de medida que se use. El número es un operador que actúa sobre la unidad de medida.

Todas las cantidades que sean mutuamente comparables según las relaciones «igual a», «mayor que» y «menor que», y que, además sean mutuamente sumables (o aditivas), pueden expresarse en una misma unidad de medida y contienen, como coeficiente numérico, a uno cualquiera de los números reales. Ejemplo: Todas las longitudes (que son comprables, y, son sumables entre sí) son expresadas (o expresables) en «metros», o en «millas» (u otras unidad análoga). Lo mismo puede decirse de los salarios diarios de distintos trabajadores, y de capital invertido en distintas propiedades.

Y todas las cantidades medibles que sean mutuamente sumables y comparables forman una clase que se llama una magnitud. En el ejemplo recién mencionado, la clase de todas las medidas de la forma «*r.* metros» y de sus equivalentes (siendo «*r*» un número real), se llama «la magnitud longitud». La clase de todos los valores en dinero atribuidos a las fábricas de un país se llama la magnitud «capitales industriales». Desde los comienzos de la ciencia del Análisis Dimensional se usa representar las magnitudes de que se trate, con letras mayúsculas encerradas en corchetes cuadrados. Así, por ejemplo, se presentan: Longitud, [*L*], Duración,

[T]; Amplitud Angular, [A]; Fuerza Laboral [W]; etc., etc.

Muchísimas magnitudes distintas resultan del estudio de magnitudes previamente conocidas que se combinan y que dan lugar a aquellas. Se llaman magnitudes derivadas. Tales combinaciones son representables algebráicamente como productos, potencias y cuocientes de las primeras. Ejemplo: Si «velocidad= longitud/duración», se escribe: [*Velocidad*]=[L] [T^{-1}]. Si «precio de la tierra = valor en dinero/área de tierra», se escribe: [*Precio agrario*]= [\$] [L]$^{-2}$.

- ***Magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas***

La Física Clásica es una ciencia donde se estudian y se trabaja con magnitudes susceptibles de ser medidas y con relaciones cuantitativas entre ellas. También lo son, en gran medida, la Química y otras ciencias de la Naturaleza. Lo que casi nadie aprecia hoy es que en algunas ciencias sociales también se trabaja con magnitudes cuantificables y con relaciones que existen entre ellas, tal como sucede en las ciencias físico-químicas. Así ocurre con la Economía, la Demografía, la Actuaría y la Genética.

En cada una de estas ciencias que trata de magnitudes cuantificables, sucede que al abordar su estudio resaltan algunas magnitudes de especial importancia conceptual y metodológica, y que, además, presentan tres particularidades técnicas:

1. Se les puede definir y construir patrones unitarios y procedimientos de medida que sean muy exactos, fáciles de replicar, aceptables universalmente, y que no dependan de la definición ni de la medición de otra magnitud.

2. Para cada una de esas magnitudes se pueden definir uno o varios procedimientos y medios técnicos para comparar dos cantidades de aquella, y determinar así si son equivalente, o cuál de las dos es mayor que la otra.

3. Para cada dos cantidades de una misma de esas magnitudes se puede establecer una técnica para reunirlas, tal que la medida de su reunión sea la suma aritmética de las dos medidas originales.

Las magnitudes en una Ciencia que tengan estas propiedades se llaman «magnitudes fundamentales». A cada una de éstas se le puede definir una unidad de medida enteramente independiente de las unidades de medida de las demás magnitudes fundamentales.

Ejemplos de estas magnitudes fundamentales son la «Longitud» y la «Masa Inercial» en Física, y la «Moneda» y el «Trabajo humano» en Economía.

Son magnitudes físicas fundamentales, entre otras:

- La clase de las duraciones cronométricas de hechos o de fenómenos físicos, la que se representa por [T]

- La clase de las longitudes de objetos rígidos y de las distancias entre puntos del espacio físico tridimensional, la que se representa por [L]

- La clase de las amplitudes de ángulos planos [A]

- La clase de las cardinalidades de conjuntos físicos que sean numerables y finitos [N]

- La clase de las cantidades de carga en cuerpos electrizados [Q]

Y otras varias.

Tanto en Física como en otras ciencias se estudian también magnitudes cuyas mediciones dependen de mediciones de magnitudes fundamentales, y que, por lo tanto, sus unidades de medida se forman a partir de unidades de medida de magnitudes fundamentales. Ejemplos de éstas son, en el campo de la Mecánica: 1) la velocidad lineal, que se mide en medidas de longitud por cada una unidad de tiempo y se representa por $L\,T^{-1}$; 2) la densidad de sólidos, que se mide en medidas de masa por cada unidad de volumen. Esta clase de magnitudes se llaman <u>magnitudes derivadas</u>.

En esta misma ciencia hay muchas otras magnitudes derivadas:

- La aceleración de una partícula en movimiento, con el símbolo $L\,T^{-2}$

- La fuerza mecánica : $M\,L\,T^{-2}$

- El volumen de un cuerpo sólido en el espacio: L^3

- La velocidad angular de un volante en rotación: $A\,T^{-1}$

Resulta así que cada magnitud derivada se representa con un producto de potencias de magnitudes fundamentales. La combinación de estas potencias es lo que se llama «las <u>dimensiones</u> de la magnitud derivada en el sistema de <u>magnitudes fundamentales</u> que se hayan elegido como tales», o, más brevemente, la «<u>fórmula dimensional»</u> de la magnitud derivada. Ejemplo: Partiendo de la Segunda Ley de Newton, según la cual «Fuerza es igual a masa por aceleración», se obtiene que la fórmula dimensional de la Fuerza es $[F]=M\times LT^{-2}=MLT^{-2}$.

En el caso de la Mecánica Clásica, por ejemplo, lo usual es escoger como magnitudes fundamentales a la terna de magnitudes «longitudes, masas, duraciones» (LMT). Las dimensiones de una Presión (que es fuerza por unidad de área) son, por lo tanto $M\,L\,T^{-2}/L^{-2} = M\,L^{-1}\,T^{-2}$. Y si las unidades fundamentales en que se trabaja son «centímetros-gramo-segundo», la unidad de presión correspondiente es 1 $gramo \times cm^{-1}/seg^{2}$, que se llama 1 $dyna/cm^2$.

- ***El Teorema Pi de Buckingham, Vaschy y Riabouchinski***

Las ideas fundamentales del Análisis Dimensional fueron expuestas y aplicadas por el Físico y Matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier en 1822 en su clásico libro Théorie Analytique de la Charleur. Luego, en 1896, el Físico Francés A. Vaschy, en su libro Théorie de l'Electricité publicó el primer enunciado y la primera demostración de lo que hoy se llama el Teorema *Pi*. Numerosos trabajos teóricos y sobre aplicaciones a la Física y a la Tecnología se publicaron en el último medio siglo del XIX y principios del siglo XX.

Entre ellos los de Osborne Reynolds, Sir A.W. Rucker (1888), William Froude, James C. Russel (1903) y Maxwell (1894).

En 1914 el Ingeniero Agrícola estadounidense E. Buckingham publicó en la Physical Review su famoso artículo donde presentó la idea-clave de los monomios cero-dimensionales Π (*pi* griega), enunció el clásico «Teorema *Pi*» y dio su primera demostración rigurosa.

Posteriormente, en 1915 el Físico ruso Dimitri Pavlovich Riabouchinski presentó otra demostración. Aportes sustantivos adicionales al teorema y muchas aplicaciones nuevas del mismo se le han debido a Lord Rayleigh (1915), R.C. Tolman (1917), Peter W. Bridgeman (1922, EE.UU.), A.W. Porter (1933, U.K.) y Robert-Esnault-Pelterie (1945, Francia).

En su trabajo capital, Buckingham enunció el Teorema en la forma siguiente:

1. La forma más general de cualquier ecuación física completa:

$$f(x_1, \dots x_n) = 0$$

es

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m) = 0$$

donde los Π son los monomios independientes de dimensión nula que puedan formarse con las *n* magnitudes x_j consideradas.

2. El número de estos monomios independientes es $i = n - q$, donde q es el número de magnitudes fundamentales que sean necesarias para expresar y medir las n variables x_i que describen el fenómeno.

Nota: Buckingham llama «completa» a toda ecuación que conserva su forma al cambiar las unidades en que se miden sus variables.

Este teorema también se puede expresar en los términos siguientes, que están ligeramente adaptados para su aplicación a temas de la Economía:

Sean q_1, q_2, q_3,…, q_n varias variables cuantificables que intervienen de manera relevante y significativa en cierto problema o sistema de la Teoría Económica y que se sabe por estudios previos que están relacionadas por una o varias ecuaciones como

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

de la cual se puede despejar cada variable, por ejemplo q_1:

$$q_1 = k \bullet \psi(q_2, q_3, \dots, q_n)$$

donde k es una constante no arbitraria y ψ es una función aún desconocida pero no arbitraria. En estas condiciones, si h es el número de magnitudes fundamentales que se necesitan para expresar las fórmulas dimensionales de las n variables q_j (j =1,2,…, n), entonces habrá h variables fundamentales, mientras las otras $m = n - h$ variables formarán un conjunto de $m = n - h$ monomios cero-dimensionales Π_1 , Π_2 ,…, Π_m. De tal manera, la relación F (q_1 ,…, q_n) = 0 se puede convertir en la ecuación

$$\phi\,(\Pi_1 , \Pi_2 , \dots , \Pi_m) = 0$$

y de aquí en su equivalente

$$\Pi_1 = k_1 \bullet \varphi\,(, \Pi_2 , \dots , \Pi_m)$$

Nota 1. Obsérvese que este conjunto de monomios cero-dimensionales (Π_1,…,Π_m) no es único y según el proceso algebraico pueden resultar otros m productos cero-dimensionales. Sin embargo, cada uno de estos grupos de monomios son mutuamente independientes entre ellos y forman un conjunto completo.

Nota 2. Se dice que el conjunto de los Π_j son mutuamente independientes si ninguno de ellos es idéntico a un producto de potencias de los demás.

Nota 3. Y se dice que es un conjunto completo porque cada otro producto cero-dimensional (distinto de los Π_j) puede expresarse como un producto de potencias de dos o más de los Π_j .

Nota 4. En el sistema Π_1 ,…, Π_n, cada par de estos se puede reemplazar por un producto (o un cuociente) de potencias de ellos mismos.

Por ejemplo: si los monomios Π_1 y Π_2 son reemplazados por $U_1 = \Pi_1 / \Pi_2$ y $U_2 = \Pi_1, \Pi_2$, el nuevo sistema (U_1, U_2, Π_3 ,…, Π_n) también satisface el Teorema *Pi*, y en este sentido equivale al sistema (Π_1, Π_2 ,…, Π_n).

Más brevemente, el Teorema *Pi* afirma que en una ciencia dada, donde se determina por experimentos o por raciocinio que en un fenómeno o situación específica intervienen de manera determinante las magnitudes (variables o constantes) medibles q_1 , q_2 ,…, q_n (geométricas, mecánicas, demográficas, macro-económicas, físicas, etc.) y donde una de ellas es una función de las demás mediante ecuaciones dimensionalmente homogéneas, esa función se puede expresar como una relación funcional implícita entre monomios cero-dimensionales de aquellas magnitudes (o de sus potencias) referidas a un sistema determinado de magnitudes fundamentales en esa ciencia.

Una advertencia de Bridgeman. El Físico estadounidense Peter W. Bridgeman escribió en su artículo sobre el Análisis Dimensional para la Enciclopedia Británica, edición de 1962, el siguiente comentario: «El principal uso de análisis dimensional es el de deducir, a partir de un estudio de las dimensiones de las variables en cualquier sistema físico (aquí se diría "cualquier sistema económico"), ciertas limitaciones sobre la forma de cualquier posible relación (cuantitativa) entre esas variables. El método es de vasta generalidad y sencillez matemática…. Este método no es capaz de determinar completamente la relación (o las relaciones) funcionales desconocidas a que conduce. En los casos más sencillos puede producir toda la fórmula que se busca (sin funciones indeterminadas), excepto un factor incógnito de proporcionalidad…En casos más complicados, donde hay un número más grande de variables, el Análisis Dimensional puede mostrar que las variables deben entrar en las funciones indeterminadas en ciertas combinaciones (como productos de potencias de aquéllas), reduciendo así el número de relaciones funcionales indeterminadas. Tal vez su empleo más importante se encuentra en relación con problemas tan complicados que no solamente es imposible encontrar una solución exacta por métodos puramente matemáticos, sino que ni siquiera es posible dar una descripción precisa y detallada de los sistemas, de los fenómenos y de las ecuaciones fundamentales de las cuales se debe obtener la solución. Muchos problemas sobre el diseño de aeroplanos y de barcos son de esta naturaleza. En estos casos suele ser posible que un conocimiento de las condiciones y limitaciones sobre cualquier relación funcional permita cubrir completamente el campo de todas las relaciones experimentales con un número mucho menor de experimentos de lo que sería necesario de otra manera. En esta forma el Análisis Dimensional presta amplísimas aplicaciones en Ingeniería».

- ***Aplicación del Teorema Pi en Economía***

La principal aplicación de este teorema es la de deducir algunas relaciones cuantitativas que determinan leyes o fenómenos de los que se trata en Teoría Económica. El método para hacerlo sigue el siguiente procedimiento:

1. Estudiar y analizar cualitativa y conceptualmente muy bien las ideas, las relaciones y las condiciones del problema, hasta identificar claramente las variables cuantitativas determinantes que intervienen en el fenómeno y en las situaciones de que se trata. Sean estas variables $q_1, q_2, \cdots q_n$. Tener muy presente las unidades de medida en que se expresan tales variables.

2. Guiándose por las unidades que se adopten para las q_i, y por consideraciones teóricas, escoger las magnitudes fundamentales que se vayan a usar como «<u>base dimensional</u>» (por ejemplo: Población (*P*), Moneda corriente (*M*), Tiempo civil (*T*), etc.). Sean $M_1, M_2, \cdots, M_k$.

<u>**Observación:**</u> Las unidades de medida de las magnitudes M_j deben ser del mismo sistema de unidades de las variables q_i.

3. Valiéndose de sus definiciones, escribir las fórmulas dimensionales de cada q_i en términos de las magnitudes

fundamentales M_k, como productos de potencias (conocidas) de estas últimas. Así resultan *n* fórmulas:

$$q_1 = M_1^{a_1} M_2^{b_1} \cdots M_k^{h_1}\ ,\ q_2 = M_1^{a_2} M_2^{b_2} \cdots M_k^{h_2}, \ldots,\ q_n = M_1^{a_n} M_2^{b_n} \cdots M_k^{h_n}$$

donde los exponentes $a_1, \cdots, h_1, a_2, \cdots h_2, \cdots, a_n, \cdots h_n$ son números enteros o quebrados, positivos o negativos, que se conocen o que son deducibles con base en ideas y en relaciones de la Teoría Económica.

El problema de que se trata es el problema de establecer la función explícita:

$$q_1 = q_1(q_2, q_3, \cdots, q_n)$$

4. Para proceder a resolverlo, proceder a escribir la función implícita

$$F(q_1, q_2, \cdots, q_n) = 0$$

la cual se presume que liga a las variables q_i que describen o determinan el sistema o el fenómeno en cuestión. La función explícita

$$q_1 = G(q_2, q_3, \cdots, q_n)$$

es la solución de la ecuación $F(q_i) = 0$, según el teorema de las funciones implícitas. Se trata así de expresar a q_1 como función explícita de las demás variables $(q_2, q_3, \cdots, q_n)$.

5. Plantear la ecuación

$$\phi(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p) = 0$$

que según el Teorema *Pi*, existe y es equivalente a $F(q_i) = 0$, y donde $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$ son productos cero-dimensionales de variables q_i, y que tienen fórmulas dimensionales como

$$[\Pi] = M_1^0\ M_2^0\ \ldots M_k^0$$

en términos de algún grupo de magnitudes fundamentales M_j que se escoja, y donde, por definición, es

$$\Pi_j = q_1^{e_1}\ q_2^{e_2}\ \ldots\ q_n^{e_n}$$

siendo $e_1, \ldots, e_n$ números reales no todos nulos.

6. Escribir la fórmula dimensional de cada variable q_i en términos de las magnitudes fundamentales:

$$q_i = M_1^{a_i} \cdot M_2^{b_i} \cdots M_k^{h_i} \quad (i = 1,2,3, \ldots, n)$$

(siendo conocidos todos los exponentes $a_i, b_i, \ldots, h_i$); y sustituir estas fórmulas en el monomio genérico Π_j indicado arriba.

7. Se obtiene así:

$$\Pi = \left(M_1^{a1} \cdot M_2^{b1} \ldots M_k^{h1}\right)^{e1} \cdot \left(M_1^{a2} \cdot M_2^{b2} \ldots M_k^{h2}\right)^{e2} \ldots$$

$$\ldots \left(M_1^{an} \cdot M_2^{bn} \ldots M_k^{hn}\right)^{en}$$

en donde los exponentes "*ei*" son números reales aún incógnitos.

8. Reduciendo en la expresión anterior los exponentes, y puesto que ∏ en nulidimensional (∏ = $M_1^0 ... M_k^0$), resultan las siguientes ecuaciones:

Exponente de M_1: $a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \cdots + a_n \cdot e_n = 0$

Exponente de M_2: $b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + \cdots + b_n \cdot e_n = 0$

....

Exponente de M_k: $h_1 \cdot e_1 + h_2 \cdot e_2 + \cdots + h_n \cdot e_n = 0$

Este es un sistema de *k* ecuaciones lineales y homogéneas, con *n* incógnitas ($e_1, e_2, \dots, e_n$) y con $k \cdot n$ coeficientes conocidos ($a_1, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, h_1, \dots, h_n$). Para simplificar la escritura se escribirán estos coeficientes como C_{pr} donde $p = 1,2, \dots, k$ indica la ecuación correspondiente, y $r = 1,2, \dots, n$ indica la incógnita "*er*"que es afectada por C_{pr}.

9. El Álgebra Lineal indica cómo resolver este sistema de ecuaciones para encontrar las "e_r".

a) Construir numéricamente la matriz de los coeficientes C_{pr} (las *a-s* las *b-s*,..., las *h-s*) o sea la matriz $\|C_{pr}\|$, con "*k*" filas y "*n*" columnas.

b) Valorar numéricamente todos los sub-determinantes contenidos en dicha matriz. Los hay desde orden 2 hasta determinantes de orden igual al menor número de *k* y *n*.

c) Identificar el sub-determinante de mayor orden que sea distinto de cero. Este es un número natural que se llama —por definición— la característica de la matriz de coeficientes, y se indicará con «*r*», y si esta es menor que *k* ocurre que hay ecuaciones redundantes, las que se debe proceder a suprimir por el procedimiento conocido en Álgebra. Si $y = k$, continuar al paso siguiente.

d) Una vez suprimidas las ecuaciones redundantes, en el sistema quedan «*m*» ecuaciones ($m \leq k$) con las *n* incógnitas e_i, que tienen la forma

$$C_{11}, e_1 + \cdots + C_{1j}\, e_j + \cdots + C_{1n} e_n = 0$$

$$C_{m1}\, e_1 + \cdots + C_{mj}\, e_j + \cdots + C_{mn} e_n = 0$$

y donde la matriz de coeficientes $\|C_{ij}\|$ no es cero y $m < n$. Este sistema es resoluble, en el sentido de que pueden obtenerse *m* incógnitas como expresiones lineales explícitas de las $n - m$ incógnitas restantes.

e) Adoptar como incógnitas del sistema a las $m - 1$ incógnitas $e_2, e_3, \dots, e_m$ (<u>excluyendo</u> a e_1 que hemos propuesto como <u>exponente</u> de q_1, que es la variable que se quiere encontrar como función explícita de $q_2, q_3, \dots, q_n$). Las otras incógnitas ($e_1, e_{m+2}, \dots, e_n$) se tratarán como parámetros que determinan a las primeras.

f) Re-escribir el sistema en la forma

$$C_{12} \cdot e_2 + C_{13} \cdot e_3 + \cdots + C_{1m} e_m + C_{1m+1} \cdot e_{m+1} = C_{11} e_1 + C_{1m+2} \cdot e_{m+2} + \cdots + C_{1n} \cdot e_n \; ....$$

$$C_{m2} \cdot e_2 + C_{m3} \cdot e_3 + \cdots + C_{m,m+1} \cdot e_{m+1} = C_{m1}\, e_1 + \cdots + C \cdot e_n$$

es decir, dejando a e_1 a la derecha, como incógnita paramétrica. El determinante de este sistema es de orden m y vale

$$\begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} \cdots & C_{1m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m2} & C_{m3} & C_{m,m+1} \end{vmatrix} \neq 0$$

que ya es distinto a cero, y que garantiza la resolubilidad del sistema de ecuaciones

g) Usando la Regla de Crammer de determinantes, resolver este último sistema para encontrar a $e_2, e_3, \ldots, e_m, e_{m+1}$ en términos de $e_1, e_{m+2}, e_{m+3}, \ldots e_n$. Se obtiene así:

$$\begin{aligned} e_2 &= d_{21}\, e_1 + d_{2,m+2} \cdot e_{m+2} + \cdots + d_{2n} \cdot e_n \\ e_3 &= d_{31}\, e_1 + d_{3,m+2} \cdot e_{m+2} + \cdots + d_{3n} \cdot e_n \\ &\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ e_{m+1} &= d_{m+1,1}\, e_1 + \cdots \cdots + d_{m+1,n} \cdot e_n \end{aligned}$$

lo que, para simplificar la escritura, concretaremos al caso especial de $n = 5$ (cinco variables q_i) y $m = 3$ (tres magnitudes fundamentales):

$$\begin{aligned} e_2 &= d(21) \cdot e_1 + d(25) \cdot e_5 \\ e_3 &= d(31) \cdot e_1 + d(35) \cdot e_5 \\ e_4 &= d(41) \cdot e_1 + d(45) \cdot e_5 \end{aligned}$$

h) Sustituyendo los exponentes e_i en un monomio cero-dimensional se tiene

$$\Pi = q_1^{e_1} \cdot q_2^{e_2} \cdot q_3^{e_3} \cdot q_4^{e_4} \cdot q_5^{e_5}$$

$$= \left(M_1^{a_1} M_2^{b_1} M_3^{h_1}\right)^{e_1} \cdot \left(M_1^{a_2} M_2^{b_2} M_3^{h_2}\right)^{d_{21} \cdot e_1 + d_{25} \cdot e_5} \cdot$$

$$\cdot \left(M_1^{a_3} M_2^{b_3} M_3^{h_3}\right)^{d_{31} \cdot e_1 + d_{35} \cdot e_5} \cdot \left(M_1^{a_4} M_2^{b_4} M_3^{h_4}\right)^{d_{41} \cdot e_1 + d_{45} \cdot e_5} \cdot$$

$$\cdot \left(M_1^{a_5} M_2^{b_5} M_3^{h_3}\right)^{e_5}$$

y realizando las operaciones indicadas con los exponentes resulta:

$$\Pi = q_1^{e_1} \cdot q_2^{d_{21} \cdot e_1 + d_{25} \cdot e_5} \cdot q_3^{d_{31} \cdot e_1 + d_{35} \cdot e_5} \cdot q_4^{d_{41} \cdot e_1 + d_{45} \cdot e_5}\, q_5^{e_5} =$$

$$\left(q_1 \cdot q_2^{d_{21}} . q_3^{d_{31}} . q_4^{d_{41}}\right)^{e_1} \cdot \left(q_2^{d_{25}} . q_3^{d_{35}} . q_4^{d_{45}} \cdot q_5\right)^{e_5}$$

es decir: que todo monomio que sea cero-dimensional y que este formado con las variables q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 es un producto de potencias arbitrarias de los monomios

$$\Pi_1 = q_1 \cdot q_2^{d_{21}} \cdot q_3^{d_{31}} \cdot q_4^{d_{41}} \cdot q_4^{e_4} \qquad \text{y}$$

$$\Pi_2 = q_2^{d_{25}} \cdot q_3^{d_{35}} \cdot q_4^{d_{45}} \cdot q_5$$

i) Según el Teorema *Pi* de Buckingham, Vaschy y Riabouchinski, dichas variables están ligadas por una relación de la forma

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

Que, por el teorema de la función implícita, tiene un equivalente de la forma

$$\Pi_1 = \lambda \cdot \phi\,(\Pi_2)$$

donde ϕ es una función no conocida. Y sustituyendo en Π_1 las variables que lo forman y despejando q_1 se obtiene

$$q_1 = \lambda \cdot \phi\,(\Pi_2) / \quad q_2^{d_{21}} \cdot q_3^{d_{31}} \cdot \; q_4^{d_{41}}$$

<u>**Nota.**</u> La constante λ y la función ϕ no son conocidas y para encontrar su valor y su forma hay que recurrir a estudios empíricos, a la experiencia de otros conocedores y –en el caso de ϕ– a recursos del Análisis Matemático y/o del Análisis Numérico.

- ***Magnitudes fundamentales en Economía***

En muchos temas y problemas de la Teoría Económica se trata de situaciones que se pueden referir, entre otras, a algunas de las siguientes magnitudes fundamentales:

- La población asociada a un determinado sistema económico, mercado o país [*P*]. Unidades de medida: miles de personas, millones de habitantes, etc.

- El numerario (o dinero corriente y efectivo): [*D*]. Unidad de medida: dólares, euros, £, oro.

- El capital representado en activos fijos productivos, como fábricas, edificios, tierra: [*K*]. Unidad de medida: millones de dólares, 10^6£ (Entender que esta magnitud es de naturaleza distinta a D).

- La cantidad de trabajo humano remunerable: [*L*]. Unidades de medida 10^3 horas-hombre, cientos o miles de jornales.

- El tiempo social (o civil): [*T*]. Unidades de medida: días, meses, años, quincenas. Esta magnitud es muy distinta del tiempo newtoniano de la Física clásica.

- La fuerza laboral (número de trabajadores activos): [*F*]. Unidades de medida: miles de personas, etc.

- La cardinalidad o número de unidades discretas de un mismo bien valioso, de una misma clase, en un mismo sistema económico o en un proceso económico [*N*]. Unidades: números enteros positivos (#), millardos de unidades.

- El nivel general de precios en un mercado determinado (dado, por ejemplo, por un Índice de Laspeyres: [*Y*]. Unidades de medida: «puntos porcentuales base 100.0 en fecha dada».

- La energía o trabajo físico como factor productivo, a escala de un sistema económico: [*W*]. Unidad de medida:

giga-vatios-hora (GWh), quads (quadrillions of Btu= 10^{15} Btu).

- Las cantidades físicas (homogéneas) de un mismo producto (en masa), o de un material, o de una "comodity": [Q_i]. Se especificará Q_1, Q_2, etc. para referirse a materiales distintos que tengan precios y/o características técnico-económicos distintas. Se mide en toneladas, metros cúbicos, etc.

- La satisfacción o utilidad total para un consumidor, de un conjunto de bienes: [*S*]. Unidad de medida: litros de agua potable por día. Es lo mismo que la ofelimidad por unidad de tiempo social.

También hay situaciones o problemas en que hay que considerar al capital como factor de producción y no propiamente como acumulación de dinero. En estos casos, ese capital se representada por un símbolo diferente [*K*]. La práctica inveterada usa como unidades de medida a unidades de numerario de gran cuantía (v.gr. millones de dólares).

- ***Algunas magnitudes derivadas, de uso frecuente en Economía***

Son por ejemplo:

Ingreso per cápita: Dinero/Habitante-año: $M\,P^{-1}\,D^{-1}$

Tasa de interés: Dinero/Dinero-tiempo: $M^{0}\,D^{-1}$

Precio de la tierra agrícola: Dinero/área agrícola: $M\,A^{-1}$

Precio ponderal de un material: Dinero/cantidad ponderal: $M\,Q^{-1}$

Relación producto/capital de un sistema productivo: $Y\,K^{-1}\,D^{-1}$

Nivel de salarios: Dinero/Fuerza laboral-tiempo: $D\,F^{-1}\,T^{-1}$

Productividad económica de la tierra: Dinero/Área-tiempo: $D\,A^{-1}\,T^{-1}$

- ***Monomios cero-dimensionales en Economía***

Uno de los conceptos básicos del Análisis Dimensional es el de "monomios cero-dimensional", que es una expresión formada por el producto (dimensional) de potencias nulas de magnitudes fundamentales en una disciplina. Por ejemplo: La expresión

- ***Método para construir fórmulas en Teoría Económica***

$$\left[\frac{\text{Canon mensual de arrdto.de la tierra x duración arrdto.}}{\text{Precio de la tierra x área de la tierra}}\right] = \frac{DT^{-1} \times T}{DA^{-1} \times A} = D^{0}A^{0}T^{0}$$

Considérese el problema, en Teoría Económica, de encontrar una función que relacione entre ellas a varias variables reales que describen un fenómeno económico, el cual ha sido estudiado ampliamente a nivel conceptual y a nivel empírico y factual en sus aspectos cualitativos y fenomenológicos, lo cual ha permitido identificar las variables cuantitativas que lo determinan y lo describen. Esta etapa preliminar es absolutamente indispensable y crítica en todo estudio de Análisis Dimensional, tanto en Economía como en Física y como en toda otra ciencia.

Supóngase que la etapa anterior ha mostrado que las variables cuantitativas relevantes que intervienen en el fenómeno que se estudia son «*n*» en número (Digamos por ejemplo: n=5). En temas de Teoría Económica pueden ser «precio», «años», «rentabilidad», «productividad», etc.

Supóngase que estas n variables (n=5) se designan como *H, L, M, N* y *T*, como parte de la nomenclatura que se ha adoptado. Así, se puede proceder a dar los siguientes pasos:

- Identificar, entre las anteriores, la variable que se desee expresar como función explícita de las demás. Supóngase que es la que se representa con *H*, de acuerdo con la naturaleza teórica, conceptual o empírica del tema que se estudia.

- Determinar si hay restricciones entre las n variables relevantes, para hacerlas aparecer en los resultados finales. Por ejemplo, si entre algunas hay ecuaciones que las ligan «a priori», o en la realidad económica de que se trata.

- Elegir las magnitudes fundamentales que sirvan para establecer las fórmulas dimensionales de las n variables en estudio, teniendo en cuenta las definiciones de aquéllas y de éstas, y las relaciones de tipo teórico-económico que liguen a unas con otras. Supóngase, como ejemplo, que son tres y que se designan como *B, C, D* (podrían ser «capital», «tiempo civil» y «población».

Escribir las mencionadas fórmulas dimensionales. Supóngase que en nuestro caso hipotético, son

$$H = B^{b_1} C^{c_1} D^{d_1}$$

$$L = B^{b_2} C^{c_2} D^{d_2}$$

$$M = B^{b_3} C^{c_3} D^{d_3}$$

$$N = B^{b_4} C^{c_4} D^{d_4}$$

$$T = B^{b_5} C^{c_5} D^{d_5}$$

Sea Π un monomio cero-dimensional en las magnitudes fundamentales *B, C,* y *D*, y formado como producto de potencias de las variables *H, L M, N*, y *T*:

$$\Pi = H^h L^l M^m N^n T^t = B^0 C^0 D^0$$

de donde

y donde *h, l, m, n, t* son números reales aún incógnitos

$$\Pi = [B^{b_1} C^{c_1} D^{d_1}]^h \, [B^{b_2} C^{c_2} D^{d_2}]^l \, [B^{b_3} C^{c_3} D^{d_3}]^m \cdot [B^{b_4} C^{c_4} D^{d_4}]^n \, [B^{b_5} C^{c_5} D^{d_5}]^t$$

$$\Pi = B^{b_1h + b_2l + b_3m + b_4n + b_5t} \cdot C^{c_1h + c_2l + c_3m + c_4n + c_5t} \cdot D^{d_1h + d_2l + d_3m + d_4n + d_5t}$$

Pero siendo Π un monomio cero-dimensional, se tiene

$$b_1h + b_2l + b_3m + b_4n + b_5t = 0$$

$$c_1h + c_2l + c_3m + c_4n + c_5t = 0$$

$$d_1h + d_2l + d_3m + d_4n + d_5t = 0$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales (3, según hipótesis ya enunciada) con 5 incógnitas (5>3). La matriz de los coeficientes de las incógnitas:

$$M \equiv \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix}$$

tiene característica (en inglés: «*rank*») igual a tres. Así, resulta posible encontrar tres de las incógnitas como formas lineales de las otras dos. <u>Conviene que una de las que se usen para despejar las demás sea el exponente de la variable que se quiera usar para dicho fin.</u> Para este caso ya escogimos a *H* (cuyo exponente en Π es *h*).

Exponente de *D* en Π : $d_1 (\alpha_1 n + \beta_1 t) + d_2 (\alpha_2 n + \beta_2 t) + d_3 (\alpha_3 n+\beta_3 t) + d_4 n+d_5 t=0$

realizando las operaciones algebraicas indicadas, reuniendo términos semejantes y simplificando coeficientes.

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones y escogiendo como variables indeterminadas a *h* y a *l*, se obtiene:

$h = h$ (indeterminada), $l = l$ (indeterminada),

$$m = \alpha_1 h+\beta_1 l \, , \; n=\alpha_2 h + \beta_2 l \; , \; t=\alpha_3 h +\beta_3 l$$

De manera que el monomio cero-dimensional Π es:

$$\Pi = H^h L^l M^{(\alpha_2 h + \beta_2 l)} \, T^{(\alpha_3 h + \beta_3 l)}$$

$$= (HM^{\alpha_1} N^{\alpha_2} T^{\alpha_3})^h \, (L M^{\beta_1} N^{\beta_2} T^{\beta_3})^l$$

$$= \Pi_1^h \quad \Pi_2^l$$

Entonces la ecuación que se busca como función implícita

$$\psi\,(H, M, N, T) = 0$$

resulta equivalente –por el teorema *Pi*– a la ecuación

$$\phi\,(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

que, por el mismo teorema de la función implícita, se puede escribir

$$\Pi_1 = k \, . \, \varphi(\Pi_2)$$

donde *k* es una constante indeterminada

Por lo tanto:

$$HM^{\alpha_1} N^{\alpha_2} T^{\alpha_3} = k \cdot \varphi(L M^{\beta_1} N^{\beta_2} T^{\beta_3})$$

$$H = k \cdot M^{-\alpha_1} N^{-\alpha_2} T^{-\alpha_3} \cdot \varphi(L M^{\beta_1} N^{\beta_2} T^{\beta_3})$$

El análisis Dimensional llega hasta aquí. Para obtener información más explícita sobre la constante *k* y sobre la función φ hay que recurrir a más experimentación o a estudios adicionales sobre la teoría de funciones de variables reales.

Algunos ejemplos

Se muestran a continuación cinco ejemplos del trabajo de cómo obtener las expresiones cuantitativas (o fórmulas) que rigen algunas situaciones o problemas de la Macroeconomía y de la Microeconomía.

- ***Demanda de trabajo humano en una producción industrial.***

Se trata de una empresa industrial que fabrica un producto *X* que se mide por millardos de unidades. El empresario trata de calcular la cantidad de trabajo humano (en hombres-día, o sea en jornales) que necesitará para fabricar una cierta cantidad *Q* de producto en un año. El empresario sabe (o conjetura) que dicha cantidad de mano de obra también depende del nivel de salarios, del precio de venta del producto *X*, y de la naturaleza de la tecnología que usa la fábrica y que está descrita por el coeficiente c que aparece en la conocida Ecuación de Cobb-Douglas.

Establecer la Ecuación de Cobb-Douglas en este caso y calcular el trabajo humano que necesita la fábrica.

Las variables que intervienen en el problema son:

N: cantidad de trabajo humano requerido en un año (en días-hombre, es decir en jornales).

w: nivel de salario (en moneda corriente por jornal)

p: precio de venta del producto *X* (en moneda corriente por millardo de unidades)

K: capital fijo invertido en planta de producción (en mega-dólares)

c: coeficiente de tecnología para la función de Cobb-Douglas que rige en la fábrica: Media geométrica ponderada de las respectivas productividades físicas promedias del trabajo *N* y del capital representado en planta *K*.

Las magnitudes fundamentales de la Teoría Económica que intervienen en este problema son:

L: el trabajo humano (hombres x tiempo)

T: el tiempo civil (en meses o años)

D: el dinero-capital (en «mega-moneda»)

M: el dinero como moneda corriente (en «pesos»)

Q: la cantidad de producto producido (en millardos de unidades)

Dimensiones de las variables:

$$N = LT^{-1} \qquad K = D$$

$$w = M \cdot L^{-1} \qquad c = QL^{-\alpha} D^{\alpha-1} T^{\alpha-1}$$

$$p = M \cdot Q^{-1}$$

Relación funcional entre las variables

$$\psi\,(N, w, p, K, c) = 0$$

$$\text{Teorema } Pi\text{: } \psi\,(N, w, p, K, c) = 0 \Leftrightarrow \varnothing(\Pi) = 0 \text{ siendo } \Pi = N^{n} w^{u} p\,[\,r\,K^{l}\,c^{5} \Leftrightarrow$$

$$L^{0} T^{0} D^{0} M^{0} Q^{0} = [L \cdot T^{-1}]^{n}\,[M \cdot L^{-1}]^{u}\,[M\ \ Q^{-1}]^{r} D^{l} \cdot$$

$$\cdot\,[Q\,L^{-\alpha}\,D^{\alpha-1}\,T^{\alpha-1}]^{5} =$$

$$= L^{\,n-u-\alpha s}\,T^{\,-n+\alpha s-s}\,D^{\,d+\alpha s-s}\,M^{\,u+r}\,Q^{\,-r+s}$$

Nulidimensionalidades:

$$n - u - \alpha s = 0;\ -n + \alpha s - s = 0;\ l + \alpha s - s = 0;\ u + r = 0\ ;\ -r + s = 0$$

de donde:

$$n = -(1-\alpha)s\ ;\ n = (1-\alpha)s\ ;\ l = s(1-\alpha)\ ;\quad u = -s\ ;\ r = s$$

y por eso, el monomio cero-dimensional que se busca es

$$\Pi = (N^{\alpha-1}\,w^{-1}\,p\,K^{1-\alpha}\,c)^{s}$$

y la función que se busca es

$$\varphi\,(N^{\alpha-1}\,w^{-1}\,p\,K^{1-\alpha}\,c) = 0$$

de donde se deduce que

$$c = k\,w\,\frac{K^{\alpha-1}}{N^{\alpha-1}p} \quad \text{y} \quad N = \left(\frac{A\cdot p}{k\cdot w}\right)^{1/(1-\alpha)} K$$

donde *k* es una constante que el Análisis Dimensional no proporciona y que hay que evaluar por otros métodos.

- ***La ecuación de Fischer en la teoría cuantitativa del dinero***

La ecuación de Fischer es bien conocida en el estudio de la teoría monetaria, donde aquella se deduce mediante una condición de equilibrio que puede llamarse «principio de conservación del dinero». Aquí se va a usar el Teorema *Pi* del Análisis Dimensional para deducir la ecuación de Fischer.

En este tema intervienen las siguientes variables económicas:

M: stock de dinero en la economía de un país

V: velocidad de circulación del dinero (pagos de cada dólar promedio/año)

P: nivel general de precios (medido por el índice nacional de precios)

H: flujo de bienes o volumen de comercio.

Las anteriores variables (magnitudes) se pueden referir a las siguientes magnitudes fundamentales:

D: dinero

T: tiempo civil

Q: cantidad de bienes comerciables

N: cardinalidad (veces que un mismo bien es transado)

las que dan a las variables ya citadas las siguientes fórmulas dimensionales: $[M]=D$, $[V]=N\,T^{-1}$, $[P]=D\,Q^{-1}$, $[H]=QNT^{-1}$, según sus definiciones respectivas.

Una cuidadosa reflexión teórica preliminar ha mostrado que las variables que caracterizan el fenómeno de la circulación del dinero en un mercado nacional, son las que mencionan arriba (*M, V, P, H*), en el sentido de que ellas son las variables necesarias y suficientes para describir, analizar y caracterizar los fenómenos mencionados. Luego, la relación entre tales variables es de la forma

$$\psi\,(M, V, P, H) = 0$$

Y según el Teorema *Pi*, la anterior ecuación debe poder expresarse como $\phi(\Pi) = 0$, siendo Π un monomio cero-dimensional de la forma

$$\Pi = M^{m} V^{n} P^{q} H^{r} = D^{0} T^{0} Q^{0} N^{0}$$

$$= D^{m} (NT^{-1})^{n} (DQ^{-1})^{q} (QNT^{-1})^{r}$$

$$= D^{m+q}\, T^{-n-r}\, Q^{-q-r} N^{n+\mathrm{r}}$$

De lo anterior se siguen las ecuaciones

$$m + q = 0\,,\ -n - r = 0\ ,\ -q - r = 0\ ,\ n + r = 0$$

y despejando las incógnitas en términos del exponente *m* de *M*, se obtiene

$$m = m\ ,\ q = -m,\ r = m\,,\ n = -m$$

Por lo tanto, el monomio *Pi* es uno solo y vale

$\Pi = (M\,V^{-1} p^{-1} H)^{m}$, siendo *m* un número real arbitrario

y la relación entre las variables es

$$\phi\,(MV^{-1}\,P^{-1}H) = 0$$

de donde

$$MH/(VP) = k$$

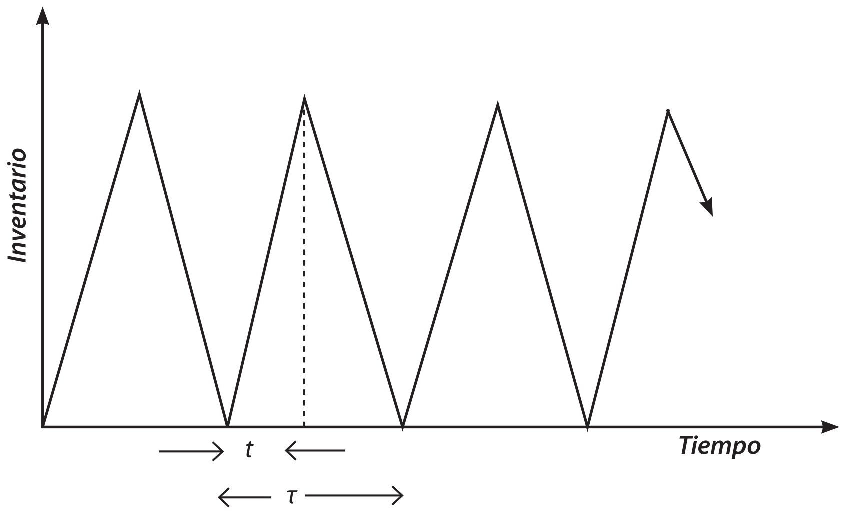
siendo *k* una constante no conocida, pero que por una elemental reflexión se deduce que vale $k=1$. Si fuera $k\neq 1$, ello significaría que los bienes comerciables o el dinero (o ambos) desaparecen o se crean de la nada, lo que contradice dos leyes de conservación muy obvias: la de los bienes valiosos y la del dinero.

Un ejemplo en Microeconomía

Una empresa de silos suministra trigo en grano a un molino de harina, en flujo continuo y constante, a razón de *S* (toneladas por día). Cuando el silo se agota, comienza a reabastecerse desde una fuente original de trigo que le suministra *p* (toneladas por día) de grano nuevo (ver dibujo anexo)

Los datos conocidos del sistema son:

Costo de suministro: C_0 (euros en cada ciclo, intermitentemente)



Costo de almacenaje: C_i (euros por tonelada-día)

Cuantía de cada lote: W (toneladas por ciclo)

Frecuencia de abastecimiento: N (ciclos por día intermitentemente)

Se calcula fácilmente que el costo diario de manejo del inventario es

$$\Gamma(W) = C_0 \cdot N + \frac{W}{2}(1 - s/p)C_i$$

$$= C_0\, N + \frac{W}{2}(1 - s/p)C_i$$

y la condición de mínimo Γ es que , $d\Gamma/dW = 0$, conduce a que el lote óptimo es

$$W^* \quad \sqrt{\frac{2\, C_0\, S}{C_i\,(1 - S/p)}}$$

De aquí, se deduce que la frecuencia de reposición del inventario, para minimizar el costo de gestión, es:

$$N^* \quad \sqrt{\frac{S \cdot C_i\,(1 - S/p)}{2\, C_0}}$$

Los dos resultados anteriores se pueden obtener mediante Análisis Dimensional de la manera que sigue:

- Identificar las Magnitudes Fundamentales pertinentes al tema. En este caso son:

T: transcurso del tiempo civil

Q: cuantía física de un material homogéneo

U: cardinalidad (para numerar ciclos de reposición)

$\$$: dinero

- Expresar las dimensiones de las variables envueltas en el problema, en términos de las anteriores Dimensiones Fundamentales:

$[W]= Q$, $[C_0]= \$ \cdot U^{-1}$, $[C_i]= \$ \cdot Q^{-1} \cdot T^{-1}$,

$[S]= Q \cdot T^{-1}$, $[S/p]= [t/\tau]=U$, $[N]=U \cdot T^{-1}$

- Plantear el Teorema de Buckingham-Vaschy-Riabouchinski, según el cual la ley que liga a estas variables es de la forma

$$\phi\,(\Pi_1, \Pi_2, ...) = 0$$

en donde cada uno de los argumentos de ϕ es un producto cero-dimensional de las magnitudes fundamentales, es decir:

$$\Pi = N^x S^y (1 - S/P)^z \; C_i^u \; C_0^v$$

$$\Pi = U^0 T^0 Q^0 \$^0$$

- Expandir el producto Π en las potencias de las dimensiones fundamentales

$$\Pi = [U \cdot T^{-1}]^x \, [QT^{-1}]^y \, [U]^z \, [\$ \cdot Q^{-1} \cdot T^{-1}]^u \, [\$ \cdot U^{-1}]^v$$

$$= U^{x+z-v} \, T^{-x-y-u} \, Q^{y-u} \, \$^{u+v}$$

- Establecer la igualdad a cero de las potencias anteriores:

$x+z-v=0\,;\, -x-y-u=0\,;\, y-u=0\,;\, u+v=0$

- Resolver el sistema de ecuaciones lineales anteriores (que en este caso son independientes mutuamente, y son compatibles y completas): $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$, $u = -1$, $v = 1$.

En este caso resulta 1 solo sistema de soluciones, lo que da lugar a un solo producto Π.

- Escribir el producto cero-dimensional Π:

$$\Pi = N^2 \cdot S^{-1} \cdot (S/p)^{-1} \cdot C_i^{-1} \cdot C_0$$

- Escribir la solución formal de la ecuación

$$\varnothing\,(N^2 \cdot S^{-1} \cdot (S/p)^{-1} \cdot C_i^{-1} \cdot C_0) = 0$$

o sea

$$N^2 \cdot S^{-1} \cdot (S/p)^{-1} \cdot C_i^{-1} \cdot C_0 = k$$

donde *k* es una constante desconocida

- Despejar *N*:

$$N = \alpha \sqrt{\frac{S \cdot C_i\,(1 - S/p)}{2\,C_0}}$$

- Verificar que las unidades también cumplan esta fórmula: En efecto

- Unidades del lado izquierdo: unidades de *N*: ciclos/ día

- Unidades del lado derecho:

$$\sqrt{\frac{(tons/día)\,(USD/ton - día)\,(ciclo)}{(USD\,/ciclo)}} = \frac{ciclo}{día}$$

El mismo método conduce a la fórmula para el lote óptimo:

$$Q = \sqrt{2 \cdot C_0 \cdot S/(1 - S/p) \cdot C_i}$$

- ***El tamaño óptimo de una planta industrial en proyecto.***

Se trata del proyecto de montar una planta para fabricar un producto continuo, y cuya capacidad se expresa en toneladas anuales de producto.

Los estudios previos y detenidos de ingenieros, financistas y economistas muestran que el tamaño más rentable o capacidad óptima (*Q*) de la planta va a depender estrechamente de las siguientes magnitudes variables y de los siguientes parámetros:

La tasa interna de retorno (TIR) que se pretenda obtener en la vida útil de la planta: ρ

El factor de tamaño típico de planta: A, en $K(Q) = AQ^{\alpha}$

El exponente de economías de escala, en $K(Q) = AQ^{\alpha}$

El capital que cueste la planta: K

El capital de trabajo inicial: C

La tasa del impuesto sobre la utilidad : x

El tamaño actual (inicial) del mercado del producto: M_0

La rapidez previsible de crecimiento del mercado: k, en $M(t) = M_0 e^{kt}$

El precio de venta del producto: v

Vida útil previsible del proyecto: T

Plazo de depreciación de activos: T_e

Costos y gastos fijos anuales: F

Los estudios teóricos y conceptuales del tema permiten señalar que este puede tratarse sobre las siguientes magnitudes fundamentales, que son las magnitudes suficientes y necesarias para resolver el problema:

- Cantidad física del material que produce el proyecto: Φ
- Tiempo civil (o tiempo durante la vida de la planta): .Ω
- Capital financiero invertido en planta de producción: Δ
- Dinero en moneda corriente: D

Las fórmulas dimensionales de las variables son:

$[Q] = \Phi\Omega^{-1}$ $\quad$ $[M_0] = \Phi\Omega^{-1}$

$[\rho] = \Omega^{-1}$ $\quad$ $[v] = \Delta\,\Phi^{-1}$

$[A] = \Delta\,\Phi^{-\alpha}\,\Omega^{-\alpha}$ $\quad$ $[k] = \Omega^{-1}$

$[\alpha] = \Delta^0\Phi^0\Omega^0$ $\quad$ $[T] = \Omega$

$[x] = \Delta^0\Phi^0\Omega^0$ $\quad$ $[T_e] = \Omega$

$[C] = \Delta$ $\quad$ $[F] = \Delta\Omega^{-1}$

Cada monomio cero-dimensional que exista tiene la forma:

$$\Pi = \Omega^0\Delta^0\Phi^0 = [\Omega^{-1}]^{c_1}\,[\Phi\Omega^{-1}]^{c_2}\,[\Delta\Phi^{-\alpha}\Omega^{-\alpha}]^{c_3}\,[\Delta]^{c_5} \ldots$$

$$\ldots[\Phi\Omega^{-1}]^{c_7}\,[\Delta\Phi^{-1}]^{c_8}\,[\Omega^{-1}]^{c_9}\,[\Omega]^{c_{10}}\,[\Delta\Omega^{-1}]^{c_{12}}$$

de donde

Exponentes de Ω: $-c_1 - c_2 + \alpha c_3 - c_7 - c_9 + c_{10} + c_{11} - c_{12} = 0$

Exponentes de Δ: $c_3 + c_5 + c_8 + c_{12} = 0$

Exponentes de Φ: $c_2 - \alpha c_3 + c_7 - c_8 = 0$

Se tienen diez incógnitas ($c_1, c_2, c_3, c_5, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$) y tres ecuaciones; y la característica del sistema es 3. Luego: se pueden obtener tres de las incógnitas en términos de las otras siete ($c_1, c_2, c_3, c_5, c_7, c_8, c$). Estas últimas quedan como parámetros indeterminados:

$$c = c_1,\ c_2 = c_2,\ c_3 = c_3,\ c_4 = 0,\ c_5 = c_5,\ c_6 = 0,\ c_7 = c_7,\ c_9 = c_9,\ c_{10} = c_{10}$$

$$c_8 = c_2 - \alpha c_3 + c_1,\ c_{12} = c_3 - c_5 - c_8,\ c_{11} = c_1 - c_3 - c_5 - c_1 + c_9 - c_{10}$$

Por lo cual las funciones que se buscan tienen la forma de productos de monomios cero-dimensionales

$$\Pi = (\rho\,.T_e)^{c_1} (Qv/F)^{c_2}\,(Av^{-\alpha}\,.T_e^{-1}\,.\,F^{\alpha-1})^{c_3}\,\alpha^{c_4} (C\,.T_e^{-1} F^{-1})^{c_5} \ldots \text{x}$$

$$\text{x}\ v^{c_8} x^{c_6} k^{c_9} T^{c_{10}}$$

La función que se busca entre las variables es pues una función implícita entre varios monomios cero-dimensionales y variables cero-dimensionales:

$$G\,\{(p \cdot T_e), (Qv/F), (Av^{-\alpha} \cdot T_e^{-1} \cdot F^{\alpha-1}), \alpha\,, (C \cdot T_e^{-1} F^{-1}), v, x, k, T\} = 0$$

El problema que se trata en este caso busca calcular la incógnita Q, la cual se despeja de la ecuación anterior y se tiene

$$Qv/F = e{\cdot}\phi\,(u_1, u_2, \alpha, u_4, v, x, k, T)$$

en donde

$$u_1 = p \cdot T_e,\ u_2 = A \cdot v^{-\alpha} \cdot T_e^{-1} \cdot F^{\alpha-1},$$

$$u_4 = C \cdot T_e^{-1} \cdot F^{-1}$$

Mediante experimentos, investigaciones, consultorías, experticias y/o sentido común se puede determinar si el tamaño óptimo Q debe ser más grande o menos grande según que lo sea cada uno de los argumentos de ϕ. Esto permite inferir cómo debe aparecer dicho argumento.

Por ejemplo: en el mercado de maquinaria y equipo, α se encuentra en valores entre 0,5 y 1,0. Si el proyecto corresponde a un valor de α alto (p.e. $\alpha = 0{,}9$), sus economías de escala no son importantes. Luego Q no tiene que ser grande. Así: $\partial Q/\partial\,\alpha < 0$. Pero $\partial Q/\partial\,\alpha = (F/v)[\partial Ø/\partial u_2)\ (\partial u_2/\partial\alpha) + (\partial Ø/\partial\alpha)]$ deber <0. Por lo tanto, u_2 y α deben aparecer como $u_2/\alpha = Av^{-\alpha} \cdot T_e^{-1} \cdot F^{\alpha-1}/\alpha$.

Y así también:

Si A es grande (tecnología cara) ⇒ Q debe ser grande ⇒ $\partial Q/\partial A > 0$

Si x es grande (tributación dura) ⇒ Q no es muy sensible ⇒ $\partial Q/\partial x = 0$

Si M_0 es grande (mercado actual grande) ⇒ Q debe ser grande ⇒ $\partial Q/\partial M_0 > 0$

Si v es grande (producto de alto precio) ⇒ Q debe ser grande ⇒ $\partial Q/\partial v > 0$

Si k es grande (mercado venidero creciente) ⇒ Q debe ser grande ⇒ $\partial Q/\partial k > 0$

Si F es grande (gastos fijos altos) ⇒ Q debe ser grande ⇒ $\partial Q/\partial F > 0$

- ***La función de demanda por un bien de consumo***

A partir del conocimiento que da la Teoría Microeconomía sobre el mercado de un bien de consumo, se deduce que la intensidad de demanda por ese bien de consumo (al que llamaremos B_1) en un mercado no restringido, por parte de un consumidor X, (a la cual se indicará con q_1) dependerá de su prioridad en la escala de necesidades del consumidor, de su ingreso en dinero, del precio de B_1 y del precio de otros bienes que el consumidor compra. En beneficio de la sencillez didáctica suponemos que el consumidor solamente necesita otro bien (B_2) además de B_1.

Estudios previos han mostrado que la escala de necesidades de este consumidor está dada por la ecuación de ofelimidad.

$$\Omega = \{a_{11} \cdot (q_1 + \alpha_1)^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot (q_1+\alpha_1)(q_2+\alpha_2) + a_{22} \cdot (q_2+\alpha_2)^2\}^{1/\beta},$$

en donde Ω es un número real que mide el grado de satisfacción de X (llamado ofelimidad); q_1 y q_2 son las tasas temporales de consumo de B_1 y B_2; α_1 y α_2 son ritmos mínimos de consumo de los dos bienes; y β es un parámetro que mide el «nivel de exigencia» de X para quedar satisfecho con el consumo de B_1 y B_2 (juntos).

Según lo ya dicho, Ω depende de:

- Las cantidades q_1 y q_2; que X consuma de B_1 y B_2
- Los precios p_1 y p_2 a que le cuesten B_1 y B_2 a X
- El ingreso en dinero Y del consumidor

Entonces el grado de satisfacción de B_1 para el consumidor X estará determinado por la relación funcional.

$$F(q_1, p_1, p_2, Y, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}) = 0$$

en donde las a_{ij} miden el efecto en la satisfacción de X cuando deja de consumir una unidad de B_i y la reemplaza por una unidad de B_i. Cada a_{ij} es el cuociente entre una cantidad (negativa) x_i que X deja de consumir de B_j dividido por la cantidad (positiva) x_j de B_j con que el consumidor reemplaza a x_i, manteniendo el mismo nivel de satisfacción que antes de hacerlo. De acuerdo con este concepto, se tiene que $a_{11} = -1$.

Son dimensiones fundamentales en este problema:

S: La satisfacción del consumidor, o sea la clase de todos los niveles de aquella satisfacción, medida por un índice numérico construido según el método de Allen (ver R.G.D., Allen, *Mathematical Economics*, London, 1956, pp. 670-673)

Q_1: cantidades físicas de B_1 que consuma X

Q_2: cantidades físicas de B_2 que consuma X

M: dinero corriente

T: tiempo civil

Las fórmulas dimensionales de las Variables de *F* son:

$$[q_1] = Q_1 \cdot T^{-1} ; [p_1] = M \cdot Q_1^{-1}; [p_2] = [Y] = M \cdot Q_2^{-1} ; M \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

$$[a_{11}] = S^{\beta} Q_1^{-2} T^{2-\beta} ; [a_{12}] = S^{\beta} D Q_1^{-1} Q_2^{-1} T^{2-\beta} \;;\; [a_{22}] = S^{\beta} Q_2^{-2} T^{2-\beta}$$

$$[A_1] = Q_1 T^{-1} \;, \qquad [A_2] = Q_2 T^{-1}$$

Cada monómero cero-dimensional de las variables de este caso, debe tener la forma

$$\Pi \equiv q_1^{c} \cdot p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot Y^{y} \cdot a_{11}^{h_{11}} \cdot a_{12}^{h_{12}} \cdot a_{22}^{h_{22}} \cdot A_1^{k_1} \cdot A_2^{k_2} = \lambda$$

donde λ es una constante numérica no conocida que expresa el valor del producto cero-dimensional.

Sustituyendo las fórmulas dimensionales dadas en el producto propuesto, se obtiene:

Exponente de *M*: $0 \cdot q_1 + p_2 + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + p_1 + Y + 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22}$

Exponente de Q_1: $q_1 + 0 \cdot p_2 + A_1 + 0 \cdot A_2 - p_1 + 0 \cdot Y - 2a_{11} - a_{12} + 0 \cdot a_{22}$

Exponente de Q_2: $0 \cdot q_1 - p_2 + 0 \cdot A_1 + A_2 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot Y + 0 \cdot a_{11} - a_{12} - 2a_{22}$

Exponente de *T*: $-q_1 + 0 \cdot p_2 - A_1 - A_2 + 0 \cdot p_1 - Y + (2-\beta)a_{11} + (2-\beta)a_{12} + (2-\beta)a_{22}$

Exponente de *S*: $0 \cdot q_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot Y + \beta a_{11} + \beta a_{12} + \beta a_2$

De aquí se deducen las siguientes ecuaciones:

$$b_2 + b_1 + \mathrm{y} = 0$$

$$c + k_1 - b_1 - 2h_{11} - h_{12} = 0$$

$$b_2 + k_2 - h_{12} - h_{22} = 0$$

$$-c - k_1 - k_2 - y + (2-\beta)h_{11} + (2-\beta)h_{12} + (2-\beta)h_{22} = 0$$

$$\beta \cdot h_{11} + \beta \cdot h_{12} + \beta \cdot h_{22} = 0$$

El determinante de los coeficientes de las incógnitas en este sistema de ecuaciones lineales y homogéneas es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

y vale cero: la matriz es singular: pero uno de sus sub-determinantes de orden 4 es distinto de cero: la característica de la matriz es $r = 4$. Por lo tanto se pueden construir 9 – 4 = 5 productos cero-dimensionales independientes. Adoptando como incógnitas independientes a las cinco incógnitas c, b_1, k_1, k_2 y h_{12}, se pueden re-escribir las cinco ecuaciones en la forma

$$b_2 + y = -b_1$$
$$-2h_{11} = -c + b_1 - k_1 + h_{12}$$
$$-b_2 - 2h_{22} = -k_2 - h_{12}$$
$$-y + (2-\beta)h_{11} + (2-\beta)h_{22} = c + k_1 + k_2 - (2-\beta)h_{12}$$
$$\beta \cdot h_{11} + \beta \cdot h_{11} = -\beta \cdot h_{12}$$

Las cuatro ecuaciones inferiores se pueden resolver como un sistema lineal no homogéneo, y sus soluciones son

$$b_2 = c - b_1 + k_1 + k_2$$
$$y = -c - k_1 - k_2$$
$$h_{11} = (1/2)\, c - (1/2)b_1 + (1/2)k_1 - (1/2)h_{12}$$
$$h_{22} = (1/2)\, c + (1/2)b_1 - (1/2)k_1 - (1/2)h_{12}$$

Estas soluciones satisfacen también al sistema original.

Reemplazando estos valores en el monomio Π_0, resulta:

$$\Pi_0 \equiv (q_1 \cdot p_2 \cdot Y^{-1} \cdot a_{11}^{1/2} \cdot a_{22}^{1/2})^c \cdot (p_1 \cdot p_2^{-1} a_{11}^{1/2} \cdot a_{22}^{1/2})^{b_1} . (p_2 \cdot Y^{-1} a_{11}^{1/2} \cdot a_{22}^{1/2} A_1)^{k_1} \cdot$$

$$(p_2 \cdot Y^{-1} \cdot A_2)^{k_2} \cdot (a_{11}^{-1/2} \cdot a_{12} \cdot a_{22}^{-1/2})^{h_{12}}$$

es decir que Π_0 es el producto (a menos de un coeficiente como λ) de los cinco monomios cero-dimensionales

$$\Pi_1 = (a_{11}/a_{22})^{1/2} \cdot p_2 \cdot q_1/Y \; ; \; \Pi_2 = (a_{22}/a_{11})^{1/2} \cdot p_1/p_2$$

$$\Pi_3 = A_1(a_{11}/a_{22}) \cdot p_2/Y \; ; \; \Pi_4 = A_2 \cdot p_2/p_2$$

$$\Pi_5 = a_{12}/(a_{11} \cdot a_{22})^{1/2}$$

Entonces, según el Teorema de Buckingham-Vaschy-Riabouchinski, la relación funcional que se busca tiene la forma

$$\Pi_1 = \phi_2(\Pi_2) \cdot \phi_3(\Pi_3) \cdot \phi_4(\Pi_4) \cdot \phi_5(\Pi_5)$$

en donde las ϕ' – *es* son funciones desconocidas. Y para hacer explícita la demanda q_1 del bien B_1, se obtiene:

$$q_1 = e\,(a_{22}/a_{11})^{1/2}\,(Y/p_2) \cdot \phi_2\,(\Pi_2) \cdot \phi_3\,(\Pi_3) \cdot \phi_3 4\,(\Pi_4) \cdot \phi_5\,(\Pi)$$

siendo e una constante numérica cero-dimensional desconocida.

Esto es lo que el Análisis Dimensional como tal, puede aportar a la solución del problema de determinar la forma de la función de demanda para un bien de consumo dado y un consumidor dado. El resto lo pueden hacer el análisis económico o la investigación empírica.

Es enteramente posible asumir cualquier relación funcional entre los cinco productos cero-dimensionales, que mejor refleje la realidad de los hechos o las consideraciones teóricas del caso. Por ejemplo, es posible multiplicar (o dividir) los productos que contengan la variable que se quiera eliminar.

Si el estudio del mercado de B_1 ha mostrado que la cantidad q_1 que X consume es directamente proporcional a su ingreso Y e inversamente proporcional al precio de B_2, sería forzoso escribir que $\phi_2\,(\Pi_2) = 1, \phi_3\,(\Pi_3) = 1\,, \phi_4\,(\Pi_4), \phi_5\,(\Pi_5) = \gamma$ (constante desconocida) de modo que

$$q_1 = \gamma\,(a_{22}/a_{11})^{1/2}\,Y/p_2$$
$$= e'\,Y/p_2$$

Observación. La solución del sistema de ecuaciones que determinan los exponentes $c, b_1, b_2, h_{11}, h_{12}, h_{22}, A_1, A_2$ puede hacerse usando como "incógnitas independientes" a otras quíntuplas diferentes a la que se acaba de mencionar. Así se obtienen otros cinco productos cero-dimensionales, que son mutuamente independientes y que pueden permitir que se despejen los otros exponentes distintos de q_1.

Observación Final

Para todos los efectos prácticos, la aplicación del Teorema *Pi* (en Física como en Economía) solo es verdaderamente útil en los siguientes casos:

a. Si es imposible deducir la fórmula que se busca mediante métodos teóricos, cuando no haya una teoría segura y conocida para hacerlo.

b. Si en verdad se puede deducir una ecuación por métodos enteramente teóricos, pero la ecuación que se obtenga así resulta tan sumamente complicada que apenas pueda manejarse por métodos burdamente aproximados o incalculables. Un ejemplo de esta es la ecuación de demanda para un bien que se deduce de una ecuación de ofelimidad en que se distingue entre —por ejemplo— cinco o más categorías de bienes, mientras que uno o más tipos de medios de pago aparecen como argumentos de la función de ofelimidad.

En general, el Análisis Dimensional puede ser aplicado solamente para determinar la forma de una relación funcional si es posible partir de unas pocas preconcepciones intuitivas sencillas, es decir, si tenemos una teoría siquiera cruda del mecanismo y de las relaciones entre las variables.

Referencias

Allen, R.G.D. (1938). Mathematical Analysis for Economist. London.

Bridgman, P. W. (1962). Dimensional Analysis. Encyclopedia Britannica, Chicago, London and Toronto, 1962 edition, 7, p. 387.

Buckingham, E. (1914). On Physically Similar Systems: Illustration of the Use of Dimensional Equations. *Physical Review,* 4.

Cobb, C.W. & Douglas P.H. (1928). A Theory of Production. *American Economic Review*, 18.

Drobot, S. (1953). On the Foundations of Dimensional Analysis. *Studia Mathematica*, 14.

Casa F. Carlo & Poveda Ramos G. (2008). Bosquejo Histórico de la Moderna Álgebra de Magnitudes, Medellín.

Fisher, L. (1911). The Purchasing Power of Money, New York.

Fourier, J.B.J. (1822). Théorie Analytique de la Chaleur, Paris.

Landolt, M., Grösse. (1952). Masszahl un Einheit, Zurich.

Langhaar, H.L. (1951). Dimensional Analysis and Theory of Models, New York and London.

Manes, P. (1958). Des dimensions de quelques grandeurs économiques. *Revue d'economic politique*, 68.

Maxwell, J. C. (1872). Remark on the Mathematical Classification of Physical Quantities. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3.

Poveda Ramos, G. (1957). Los Sistemas de Magnitudes como Espacios Vectoriales, digitado.

Poveda Ramos, G. (2008). Modelo Matemático y Dimensional para el Planeamiento Óptimo de Industrias de Procesos, Medellín.

Rayleigh, L. (1915). The Principle of Similitude. *Nature*, 95.

Vaschy, A. (1896). Théorie de l'electricité, Paris.